Anwendungen des Darstellungssatzes von Riesz in der Stochastik

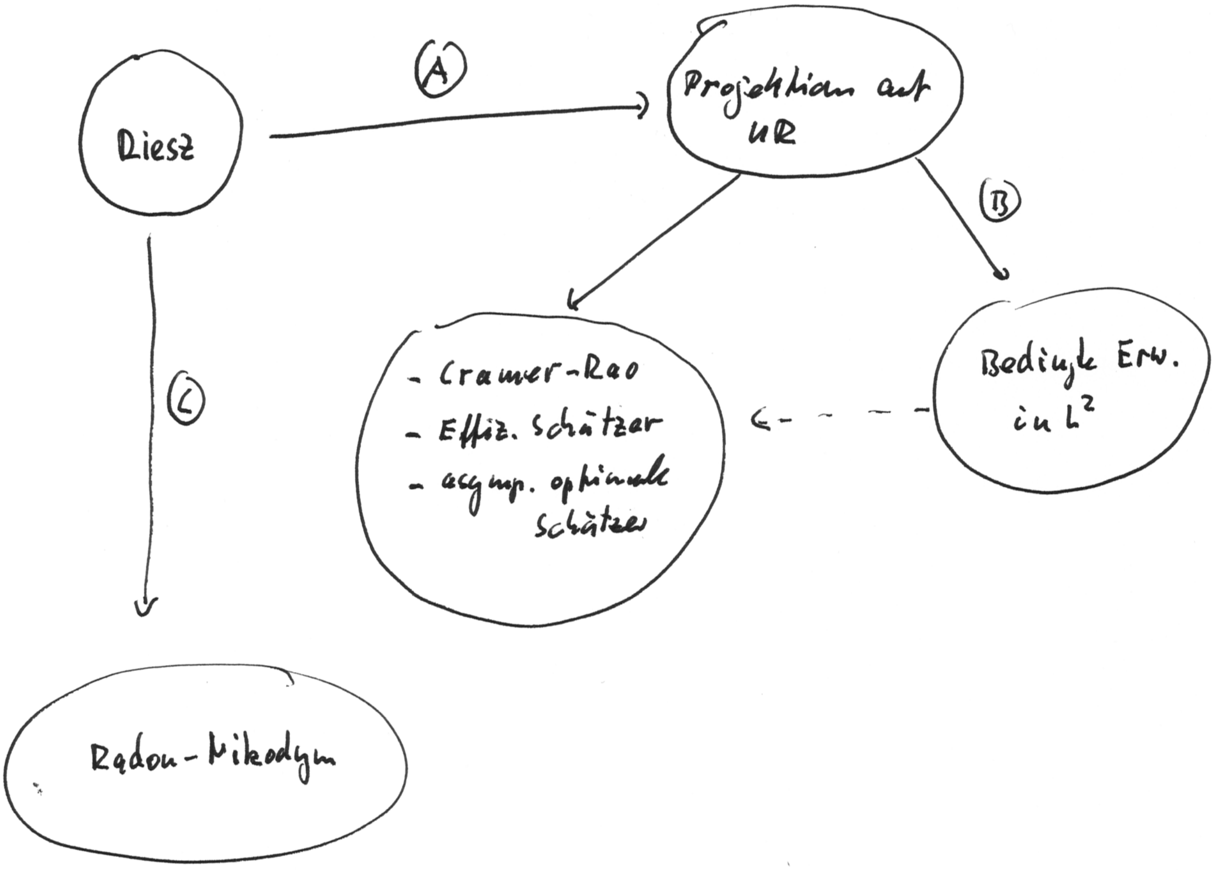
Darstellungssatz von Riesz: H HR mit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ als SP.

$\ell : H \to \mathbb{R}$ stetig lineare Abb.

$\Rightarrow$ Es gibt eine eindeutig bestimmte Riesz-Dichte $x \in H$ mit der Eigenschaft:

$$\underset{h \in H}{\forall} : \quad \ell(h) = \langle x, h \rangle$$

und $\quad \|\ell\| = \|x\|$.



Ⓐ <u>Riesz - Dichte als Projektion</u>

$U \subset H$ abgeschl. lineare UR, $x \in H$ HR.

$$\Rightarrow \exists_{u_0 \in U} : \quad \|x-u_0\| = \min_{u \in U} \|x-u\|$$

u_0 Projektion von x auf U.

<u>Bew.:</u>

$$l : U \ni u \to l(u) := \langle x, u \rangle \in \mathbb{R}$$

ist stetiges, lineares Funktional.

$$|l(u)| = |\langle x,u\rangle| \leq \|x\| \cdot \|u\|$$

$\underset{\text{Riesz}}{\Rightarrow}$ $\exists_1\, u_0 \in U$ mit

$$\langle x, u\rangle = \langle u_0, u\rangle \quad \forall u \in U$$

Also

$$(+) \quad \langle x-u_0, u\rangle = 0 \quad \forall u \in U$$

Damit folgt weiter:

$$\|x-u\|^2 = \Big\langle (x-u_0) - (u-u_0) \,\Big|\, (x-u_0) - (u-u_0)\Big\rangle$$

$$= \|x-u_0\|^2 + \|u-u_0\|^2 - 2\langle x-u_0 \mid \underbrace{u-u_0}_{\in U}\rangle$$

$$\underset{(+)}{=} \|x-u_0\|^2 + \|u-u_0\|^2$$

Die R.S. wird minimal für $u = u_0$. □

(B) Bedingte Erwartung als Riesz-Dichte

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ WR, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ Sub-σ-Alg. auf Ω, $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

$$\xi : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}^*) \qquad \mathcal{A}-\mathcal{B}^* \text{ ms.}$$

$$\mathbb{E}(|\xi|) := \int |\xi| \, d\mathbb{P} < \infty$$

$\eta \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ heißt <u>bedingte Erw. von ξ unter $\mathcal{B}$</u> $:\Leftrightarrow$

(i) η ist $\mathcal{B}-\mathcal{B}^*$ ms.

(ii) $\int I_B \xi \, d\mathbb{P} = \int I_B \eta \, d\mathbb{P} \qquad \forall B \in \mathcal{B}$.

Für bed. Erw. von ξ unter $\mathcal{B}$ schreibt man

$$\mathbb{E}(\xi | \mathcal{B}).$$

(1) <u>Existenz</u>: $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\xi \geq 0$.

$\mathcal{B} \ni B \to Q(B) := \int I_B \xi \, d\mathbb{P}$

def. endl. Maß auf $(\Omega, \mathcal{B})$ mit

$Q|_{\mathcal{B}} \ll \mathbb{P}|_{\mathcal{B}}$

$\underset{R.N}{\Rightarrow}$ $\exists$ $f \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ mit

$Q(B) = \int I_B f \, d\mathbb{P}$

$\Rightarrow$ $f = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})$ $\boxed{1}$

(2) <u>Eindeutigkeit</u>: $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})$ ist $\mathbb{P}$-f.s. eindeutig bestimmt.

(3) <u>Bedingte Jensen Ungleichung</u>: $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex mit $T(\xi) \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

$$\Rightarrow T(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})) \leq \mathbb{E}(T(\xi)|\mathcal{B}) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

(4) η $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}^*$ mb. und $\eta \cdot \xi \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}(\eta \cdot \xi \mid \mathcal{B}) = \eta \cdot \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{B}) \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Bew.: R.S. ist $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}^*$ mb. z.z. bleibt:

$$(+) \qquad \int I_B \, \eta \cdot \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{B}) \, d\mathbb{P} = \int I_B \, \eta \cdot \xi \, d\mathbb{P} \qquad \forall \; B \in \mathcal{B}.$$

(+) mit AI. zeigen. Sei dazu $B_0 \in \mathcal{B}$ und $\eta = I_{B_0}$

$$\int I_B \, \eta \cdot \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{B}) \, d\mathbb{P} = \int I_B \cdot I_{B_0} \, \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{B}) \, d\mathbb{P} = \int I_{B \cap B_0} \, \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{B}) \, d\mathbb{P}$$

$$= \int I_{B \cap B_0} \, \xi \, d\mathbb{P} = \int I_B \cdot I_{B_0} \, \xi \, d\mathbb{P} = \int I_B \, \eta \, \xi \, d\mathbb{P}.$$

usw. $\boxed{4}$

(5) $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Nach (3) folgt $\mathbb{E}^2(\xi \mid \mathcal{B}) \leq \mathbb{E}(\xi^2 \mid \mathcal{B})$, also

$$\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{B}) \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}).$$

Ferner ist $\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{B})$ die L^2-Projektion von $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \equiv H$ auf den abgeschlossenen UR. $U = L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, denn

$$\forall_{\eta \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})} : \quad \int (\xi - \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{B})) \cdot \eta \, d\mathbb{P} = \langle \xi - \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{B}) \mid \eta \rangle = 0.$$

$$\text{L.S.} = \mathbb{E}\Big((\xi - \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{B})) \cdot \eta \Big) = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{B}) \cdot \eta \big)$$

$$\underset{(4)}{=} \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\xi \cdot \eta \mid \mathcal{B}) \big)$$

$$= \int I_\Omega \cdot \xi \cdot \eta \, d\mathbb{P} - \int I_\Omega \, \mathbb{E}(\xi \cdot \eta \mid \mathcal{B}) \, d\mathbb{P}$$

$$= 0 \;, \quad \text{da } \Omega \in \mathcal{B}.$$

(6) Mit Ⓐ ist damit $\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{B})$ die Riesz-Dichte zum linearen stetigen Funktional

$$l : L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}) \ni \eta \to l(\eta) := \int \xi \, \eta \, d\mathbb{P}.$$

$\square$

(c) Rieszscher Darstellungssatz – Radon-Nikodym Dichten – Lebesguescher Zerlegungssatz

$(X, \mathcal{A})$ mb. R. mit Maßen ν und μ.

$$\nu \ll \mu \quad :\Leftrightarrow \quad \forall_{A \in \mathcal{A}} : \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$$

$$\nu \perp \mu \quad :\Leftrightarrow \quad \exists_{A \in \mathcal{A}} : \mu(A) = 0 \wedge \nu(X \setminus A) = 0$$

<u>Satz:</u> ν finit und μ σ-finit. Dann gilt:

(i) Es gibt eine eindeutig bestimmte Zerlegung von ν in $\nu = \nu_a + \nu_s$ mit $\nu_a \ll \mu$ und $\nu_s \perp \mu$.

(ii) Es gibt μ-f.s. eindeutig bestimmte $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit:

$$\forall_{A \in \mathcal{A}} : \quad \nu_a(A) = \int I_A f \, d\mu .$$

<u>Bew.:</u> Nehme an, dass μ finit ist.

$$\gamma := \nu + \mu, \qquad H := L^2(X, \mathcal{A}, \gamma)$$

$$\ell : H \ni h \rightarrow \ell(h) := \int h \, d\nu \in \mathbb{R}$$

(1) $\ell \in H^*$

Linearität ✓

$$|\ell(h)| \leq \int |h| \, d\nu \leq \int |h| \, d\gamma = \int |h| \cdot 1 \, d\gamma \underset{\text{Hölder}}{\leq} \|h\|_2 \cdot (\gamma(X))^{1/2} . \qquad \boxed{\text{M}}$$

Nach Riesz:

(2) $\exists_1 \, r \in H : \forall_{h \in H} : \int h \, d\nu = \int h \cdot r \, d\gamma$ und

$$\textcircled{+} \qquad \int h(1-r) \, d\nu = \int h r \, d\mu$$

$(+)$ folgt dabei aus

$$\int h \, d\nu = \int h r \, d\gamma = \int h r \, d\nu + \int h r \, d\mu .$$

[Einschub Falscher Beweis aber richtige „Idee“

zu $h \in H$ betrachte $\tilde{h} := h/(1-r)$ und

$$\int h \, d\nu = \int \frac{h}{1-r} (1-r) \, d\nu = \int \tilde{h} (1-r) \, d\nu \underset{(+)}{=} \int \tilde{h} r \, d\mu = \int h \left(\frac{r}{1-r}\right) d\mu$$

R.D. Dickke]

(3) $0 \le r \le 1$ γ-f.s.

$$A := \{r < 0\} = \bigcup_{n \ge 1} \underbrace{\{r < -\tfrac{1}{n}\}}_{A_n}$$

$$0 \le \int I_{A_n} \, d\nu = \int I_{A_n} r \, d\gamma \le -\frac{1}{n} \gamma(A_n) \le 0 \quad \Rightarrow \gamma(A_n) = 0$$

$$\Rightarrow \gamma(A) = 0$$

[

$$B := \{r > 1\} = \bigcup_{n \ge 1} \underbrace{\{r \ge 1 + \tfrac{1}{n}\}}_{B_n}$$

weglassen, weil analog

$$0 \ge -\frac{1}{n} \nu(B_n) \ge \int I_{B_n} (1-r) \, d\nu \underset{(+)}{=} \int I_{B_n} r \, d\mu \ge (1+\tfrac{1}{n}) \mu(B_n) \ge 0$$

$$\Rightarrow \nu(B_n) = 0 = \mu(B_n) \Rightarrow \gamma(B_n) = 0 \Rightarrow \gamma(B) = 0 .$$

]

$\boxed{3}$

(4) Setze $X_s := \{r = 1\}$, $X_a := X \setminus X_s$

$$\nu_s(A) := \nu(A \cap X_s), \quad \nu_a(A) := \nu(A \cap X_a) = \nu(A \setminus X_s)$$

Dann sind ν_s u. ν_a Maße auf $(X, \mathcal{A})$ mit $\nu = \nu_s + \nu_a$.

(5) $\nu_s \perp \mu$ denn $\mu(X_s) = 0$.

$$\mu(X_s) = \int I_{X_s} \, d\mu = \int I_{X_s} \cdot r \, d\mu \underset{(+)}{=} \int I_{X_s} \underbrace{(1-r)}_{=0} \, d\nu = 0$$

$\boxed{3}$

(6) $\nu_a << \mu$

$$0 = \mu(A) = \int I_A \, d\mu \underset{A-\mu-NM}{=} \int I_A r \, d\mu \underset{(5)}{=} \int I_{A\setminus X_s} \cdot r \, d\mu \underset{(+)}{=} \int I_{A\setminus X_s} (1-r) \, d\nu$$

$$\Rightarrow \underbrace{\nu(A\setminus X_s)}_{= \nu_a(A)} = 0$$

(7) $f := \frac{r}{1-r} \cdot I_{X_a}$. $\Rightarrow \forall_{A \in \mathcal{A}}: \quad \nu_a(A) = \int I_A f \, d\mu$

$$\nu_a(A) = \int I_{A\setminus X_s} d\nu = \int I_{A\setminus X_s} \cdot \lim_{n\to\infty} (1 - r^{n+1}) \, d\nu$$

$$= \int I_{A\setminus X_s} \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \right) \cdot (1-r) \, d\nu$$

$$= \int I_{A\setminus X_s} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} r^n \quad (1-r) \, d\nu$$

$$\underset{\text{Beppo-Levi}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int I_{A\setminus X_s} r^n (1-r) \, d\nu$$

$$\underset{(+)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int I_{A\setminus X_s} r^n \cdot r \, d\mu$$

$$\underset{\text{B.L.}}{=} \int I_{A\setminus X_s} \frac{r}{1-r} \, d\mu$$

$$= \int I_A f \, d\mu$$ $\boxed{7}$

(8) $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$

$f \geq 0$ und $\int f \, d\mu = \nu_a(X) \leq \nu(X) < \infty$ $\boxed{8}$

(9) Zerlegung ist eindeutig

$$\nu_a + \nu_s = \nu = \nu_a' + \nu_s' \qquad \text{mit } d\nu_a = f_1\,d\mu \;\&\; d\nu_a' = f_2\,d\mu,\; \nu_s, \nu_s' \perp \mu$$

offensichtlich (wegen endliche Maße)

$$(*) \quad \forall_{A \in \mathcal{A}}: \quad \nu_a(A) - \nu_a'(A) = \nu_s'(A) - \nu_s(A)$$

setze

$$\tilde{X}_s := X_s \cup X_s'$$

wobei $\mu(X_s) = 0 = \mu(X_s')$ und $\nu_s(X \setminus X_s) = 0 = \nu_s'(X \setminus X_s')$

$$\nu_a(A) - \nu_a'(A) = \int I_A f_1\,d\mu - \int I_A f_2\,d\mu = \int I_{A \setminus \tilde{X}_s} f_1\,d\mu - \int I_{A \setminus \tilde{X}_s} f_2\,d\mu$$

$$= \nu_a(A \setminus \tilde{X}_s) - \nu_a'(A \setminus \tilde{X}_s)$$

$$\underset{(*)}{=} \nu_s'(A \setminus \tilde{X}_s) - \nu_s(A \setminus \tilde{X}_s)$$

$$= 0$$

$\boxed{9}$

(10) Übertragung auf μ-σ-finit

$(A_n) \subset \mathcal{A}$ p.d. $\quad X = \bigcup_{n \geq 1} A_n \quad , \quad \mu(A_n) < \infty$.

wende Gezeigtes auf

ν und μ_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ an

$$\mu_n(A) := \mu(A \cap A_n).$$

$\boxed{10}$