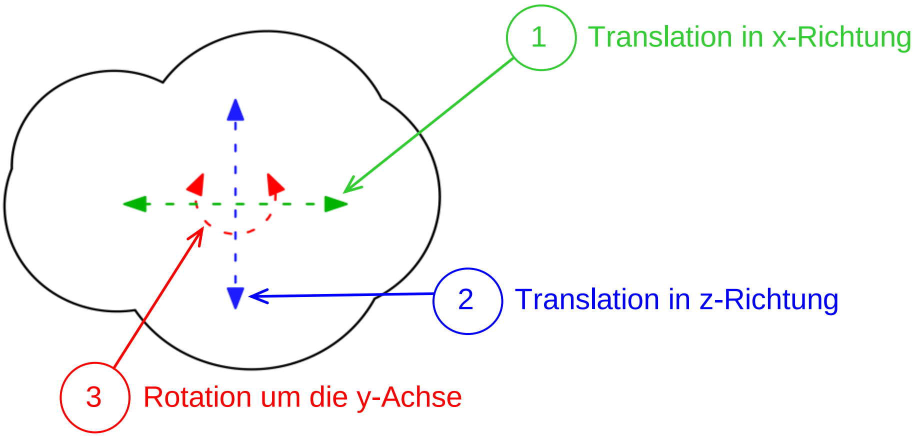
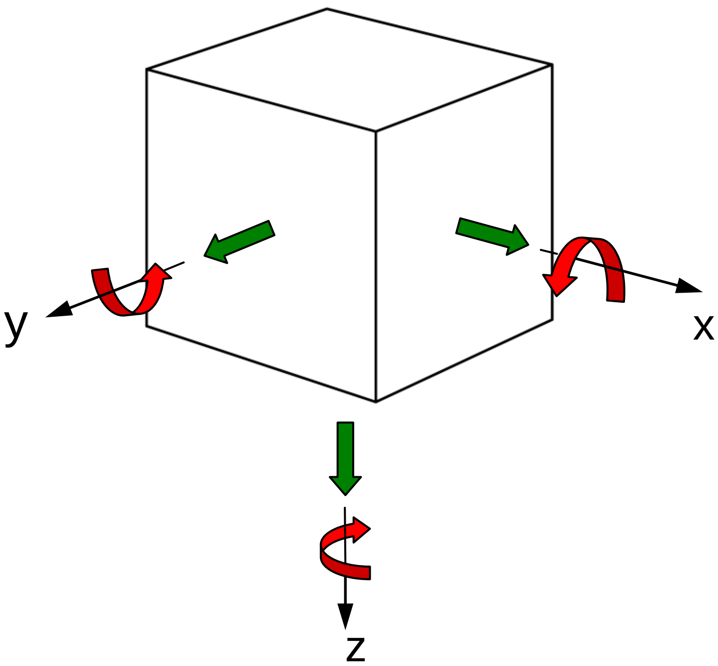
Kapitel 4: Gleichgewicht am ebenen und räumlichen Körper

4.1 Freiheitsgerade (FG) und Gleichgewichtsbedingungen (GGB)

Ein ebener Körper (Scheibe) besitzt in der Ebene, in der er aufgespannt ist, drei Freiheitsgrade:



In der räumlichen Betrachtung sind die Translation in y-Richtung sowie die Rotationen um die x- und z-Achse zu ergänzen. Es ergeben sich somit im Raum:



3 Translationen (x-, y-, z-Richtung)

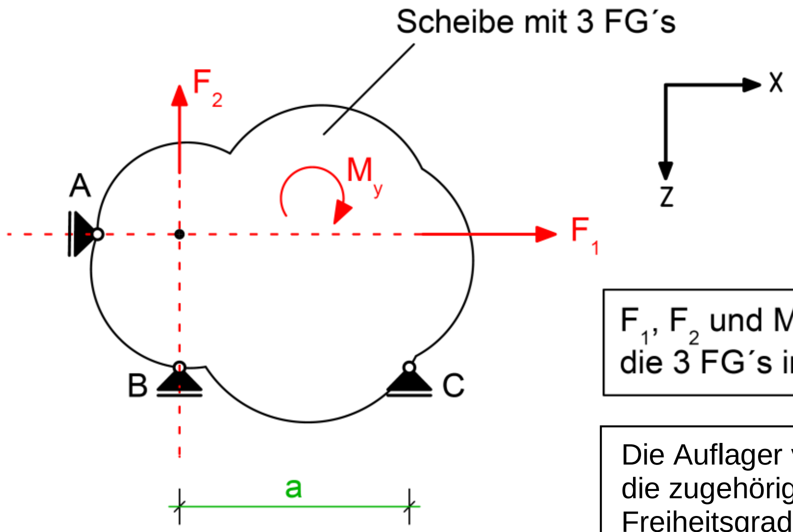
3 Rotationen (x-, y-, z-Achse)

Σ 6 Freiheitsgrade

Im Rahmen einer statischen Berechnung ist es das ureigentliche Ziel, für den ebenen und räumlichen Körper Gleichgewicht zu gewährleisten bzw. nachzuweisen (Sonderfall der Ruhe), d.h. die jeweiligen Translationen und Rotationen ausreichend zu behindern („verhindern").
Die Summe aller Kräfte und Momente muss somit hinsichtlich der Freiheitsgrade stets gleich Null sein. Die Behinderung der Freiheitsgrade geschieht durch die Auflager bzw. die Auflagerreaktionen.

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

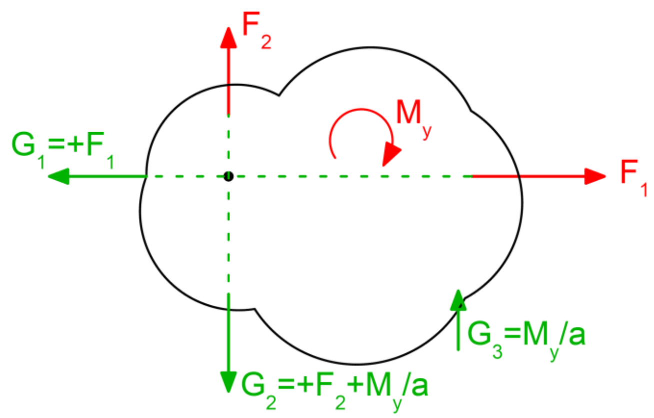
Auflagerreaktionen



F_1, F_2 und M_y bewirken die 3 FG´s in der Ebene

Die Auflager verhindern die zugehörigen Freiheitsgrade

"Freischneiden"



Die Auflagerreaktionen stellen Unbekannte dar, die wir mit Hilfe der (bei statisch bestimmten Systemen) in gleicher Anzahl vorhandenen Gleichgewichtsbedingungen ermitteln können.

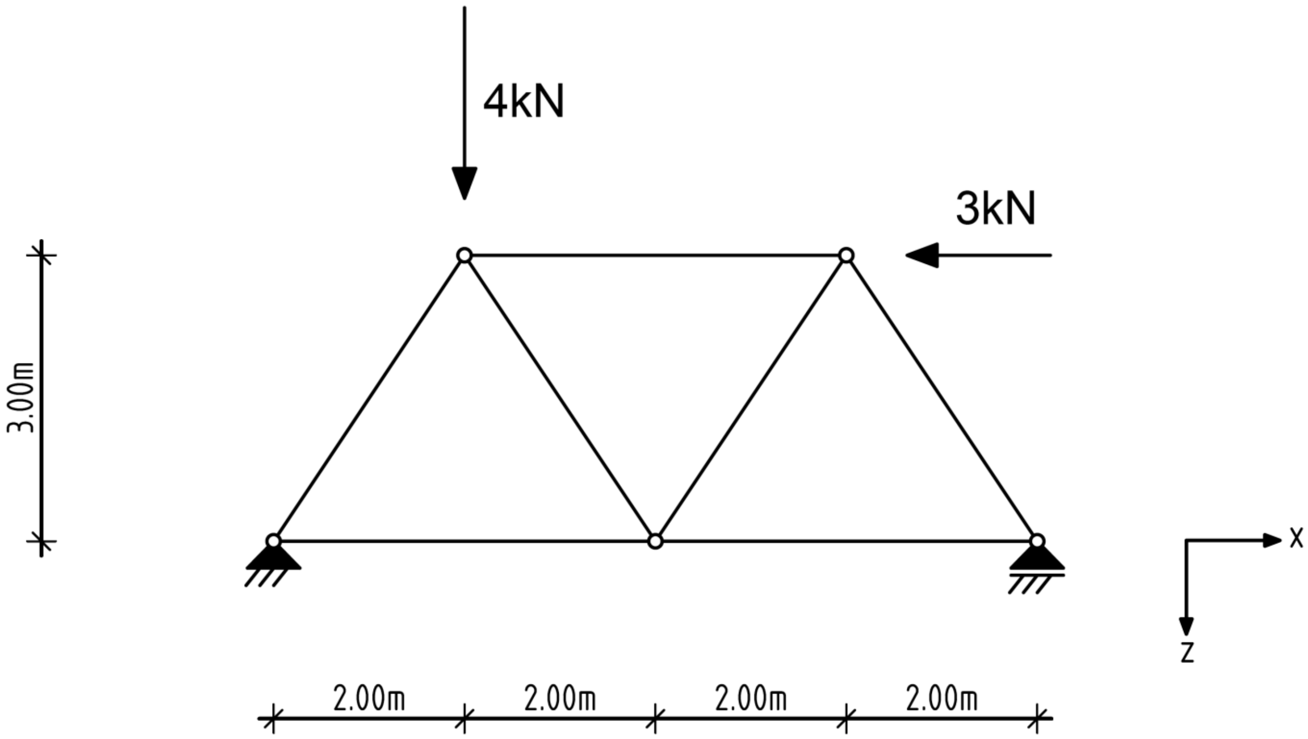
Die drei Gleichgewichtsbedingungen in der Ebene

$$\left\{\begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_z = 0 \\ \sum M_y = 0 \end{array}\right.$$

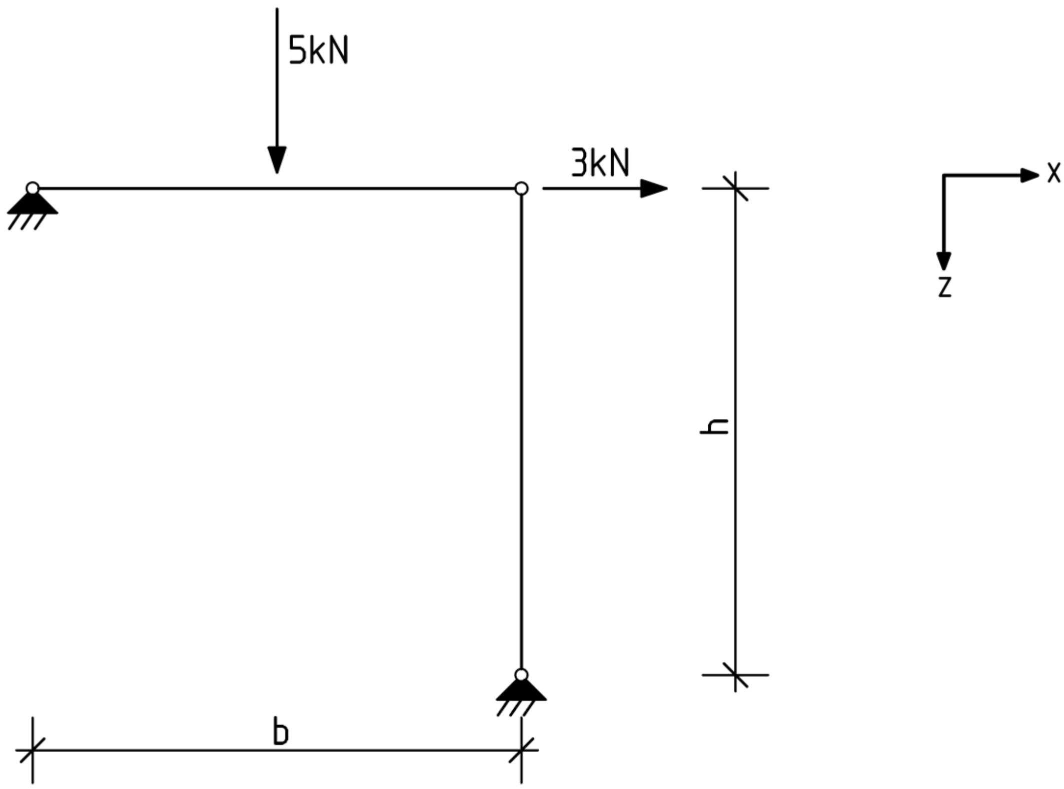
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum M_x = 0$$
$$\sum M_z = 0$$

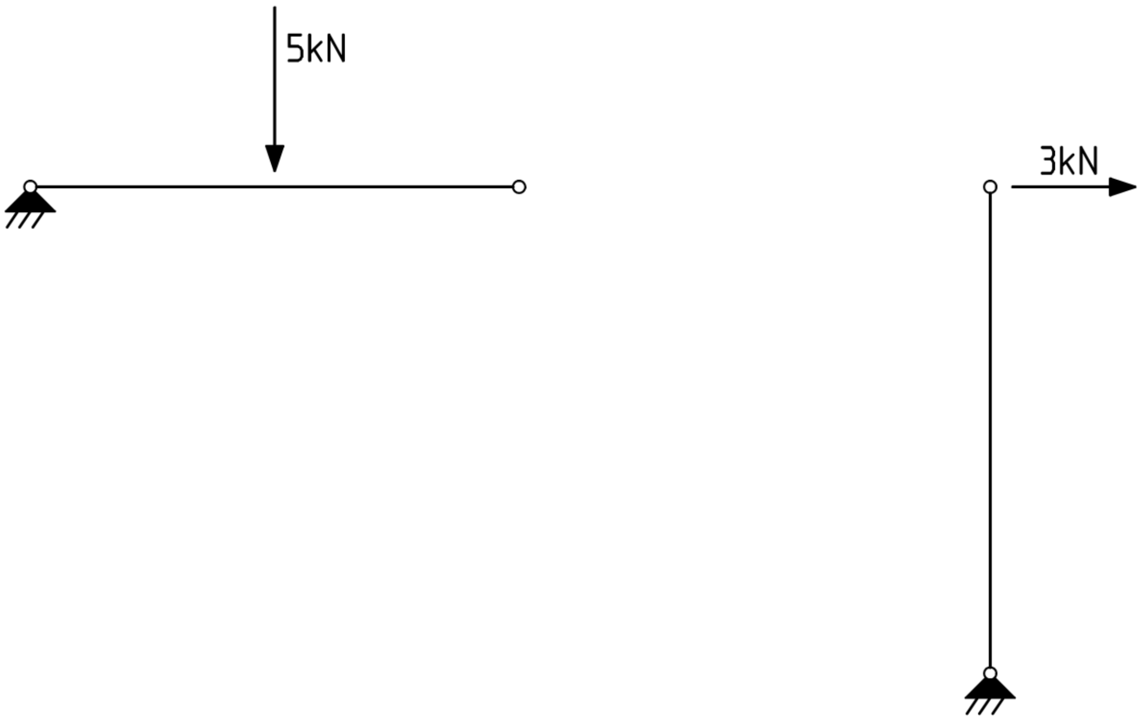
Die sechs Gleichgewichtsbedingungen im Raum

Beispiel 4.1



Beispiel 4.2

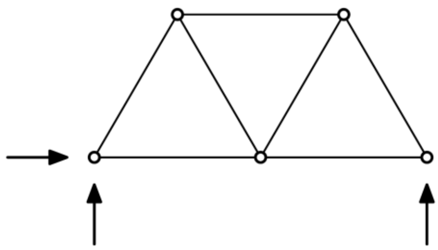




! Wichtige Hinweise zum „Freischneiden"

Grundsätzlich wird ein System von seinen Auflagern frei geschnitten, und je nach Auflager die sich einstellenden Auflagerreaktionen in Form der unbekannten Größen angetragen.

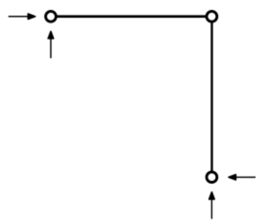
in sich "starres" System



Anzahl der Auflagerreaktionen = 3

↳ Für die Auflagerreakionen reichen die 3 GGB am Gesamtsystem aus
→ kein Freischneiden für die Auflagerreaktionen erforderlich

in sich "labiles" System



Anzahl der Auflagerreaktionen > 3

↳ die 3 GGB am Gesamtsystem reichen für die Berechnung der Auflagerreaktionen nicht aus
→ es muss bereits für die Auflagerreaktionen freigeschnitten werden

Grundsätzlich ist beim Freischneiden die folgende Regel zu beachten:

MS 4.2: Beim ***„Freischneiden"*** (bzw. *„Herausschneiden"*) eines Teilsystems vom Gesamtsystem muss am Teilsystem nach wie vor Gleichgewicht gewährleistet sein.
Dieses GG wird beim Freischneiden nur dann gewährleistet, wenn alle am Teilsystem angreifenden (bzw. am Gleichgewicht beteiligten) Kräfte und Momente berücksichtigt bzw. angetragen werden.

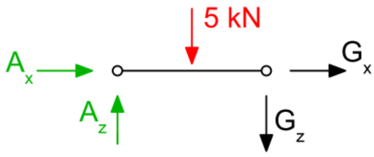
Dies sind:

1. Schnittgrößen (immer vorhanden)

2. äußere Belastung (wenn am Teilsystem vorhanden)

3. Auflagerreaktionen (wenn am Teilsystem vorhanden)

z.B. linkes Teilsystem:



4.2 Einwirkungen

4.2.1 Allgemeines

Unter Einwirkung (siehe Kapitel 1: Eigengewicht, Nutzlast, Wind, Schnee) verstehen wir einen mechanischen Vorgang (Belastung oder Beanspruchung), die in einem System Reaktionen hervorruft.
Diese Reaktionen sind…

…in der Statik starrer Körper (1. Sem.)	• Auflagerreaktionen (Kap. 4) • Innere Kräfte und Momente (Schnittgrößen Kap. 5)
…in der Fertigkeitslehre elastischer Körper (2. Sem.)	• Spannungen in Bauteilen bzw. in Bauteilquerschnitten • Verformungen (Biegung, Längenänderung) Setzungen im Baugrund)
…in der Baudynamik (Masterstudiengang)	• Beschleunigungen (geradlinig, rotierend) • Schwingungen → Ermüdung des Materials

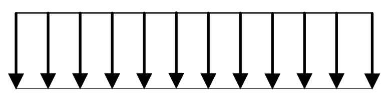
4.2.2 Die drei Grundformen von Lastbildern

- Einzellast – [kN]

  Die Einzellast hat weder eine breite noch eine Tiefe, sie veranschaulicht nur (modellhaft) punktuell wirkende Kräfte

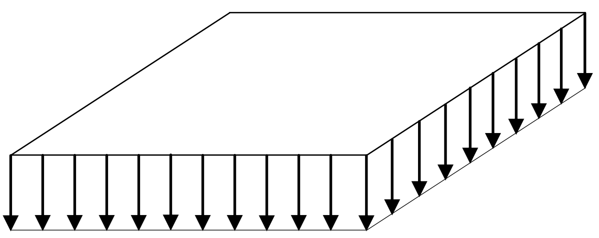
- Linienlast – [kN/m]

  Die Linienlast hat ebenfalls keine Tiefe (keine 3. Dimension) und kann daher auch nicht real sein



- Flächenlast – [kN/m^2]

  - Einzig reale Darstellung einer Last
  - Bei der Flächenlast wird die Dreidimensionalität der Körper und somit die Lastursache real erfasst; Aus der Wichte γ [kN/m^3] und der Höhe h [m] eines Körpers ergibt sich die Flächenlast.

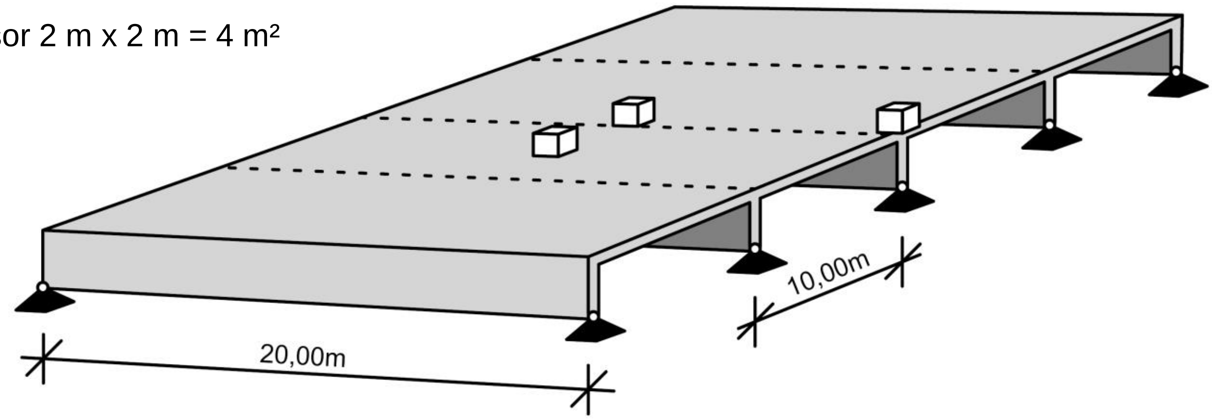


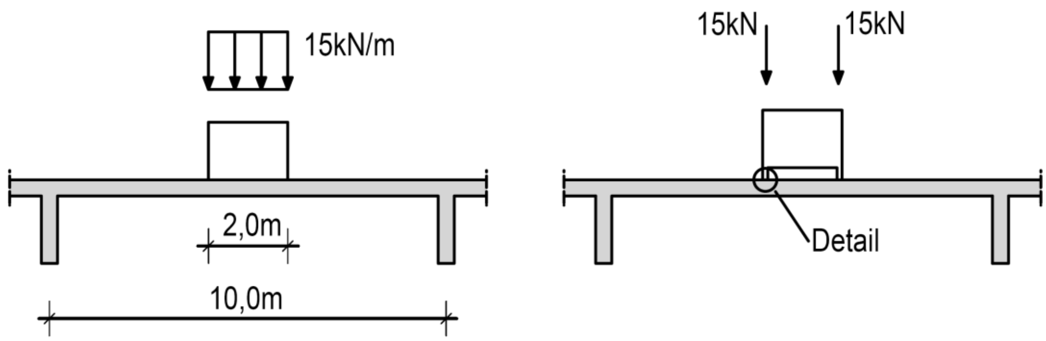
„Die Qual der Wahl!"…

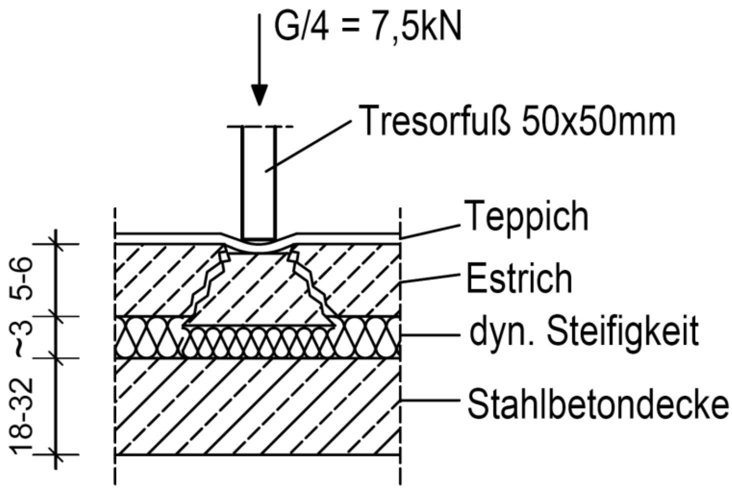
Beispiel:

Eine Bank erhält einen neuen Tresor mit G= 30 kN.
Die Grundfläche des Aufstellraumes für den Tresor entspricht 800 m².

Tresor 2 m x 2 m = 4 m²





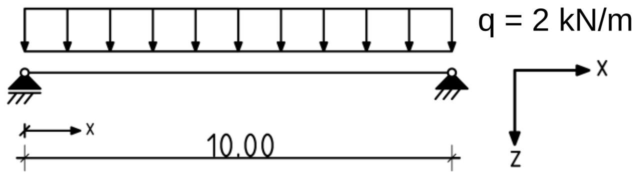


Anlage 4.2 Einige charakteristische Fallbeispiele zum Linienlastmodell

„Gleichlast"
(trivialster Fall)

Funktion:

Resultierende:

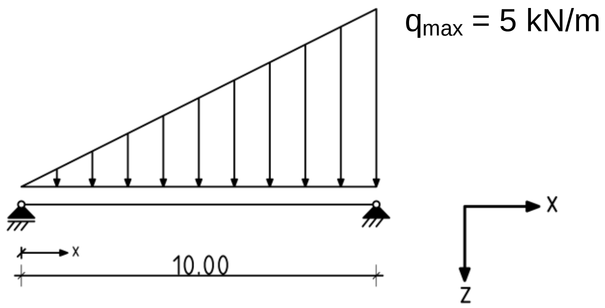


! Gedanklich ergänzen wir als Hilfestellung die Resultierende der Streckenlast mit Betrag und Lage ihrer WL. Diese Resultierende verwenden wir bei dem GGB am Gesamt- oder Teilsystem!

„Dreieckslast"

Funktion:

Resultierende:

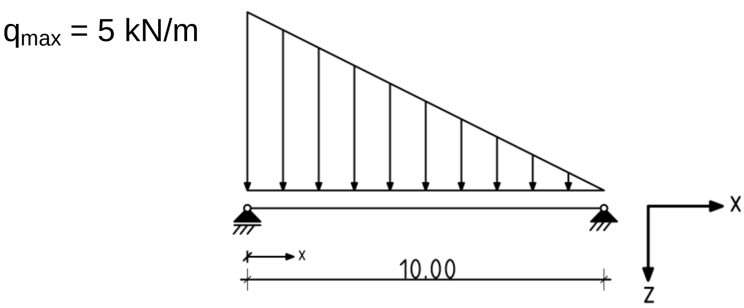


Die Resultierende einer Linienlast geht durch den Schwerpunkt der Lastfläche.

Funktion:

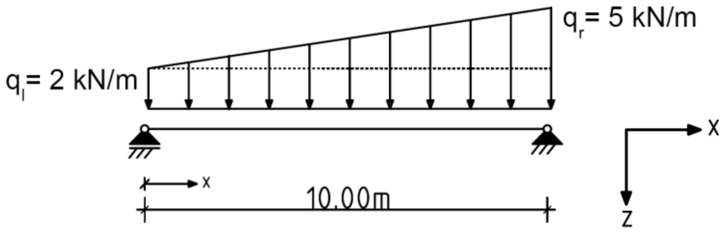
→ über lineare Geradengleichung

→über Substitution



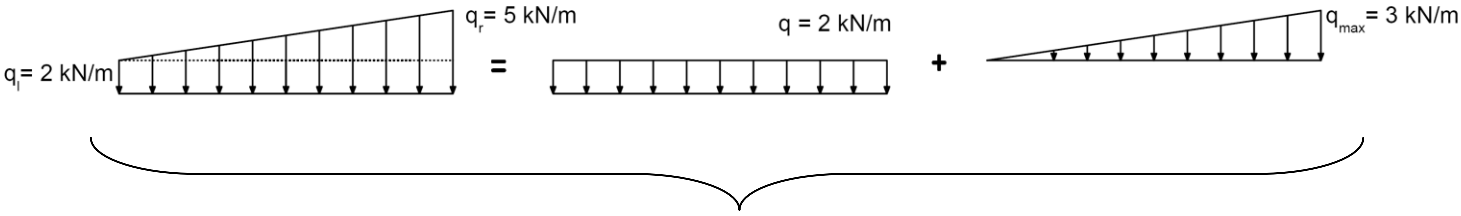
„Trapezlast"

Funktion:



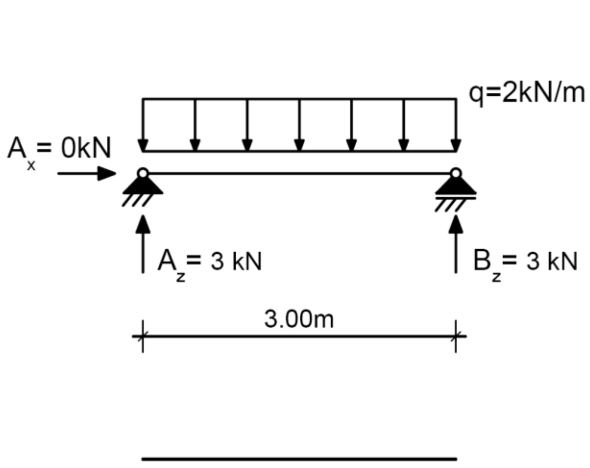
Resultierende: **R** **=** **R_1** **+** **R_2**

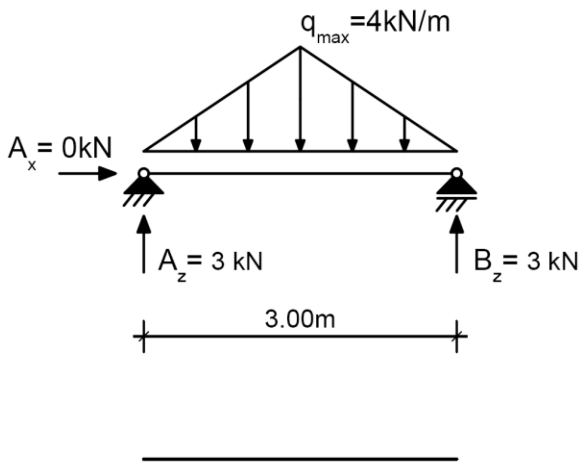
= +

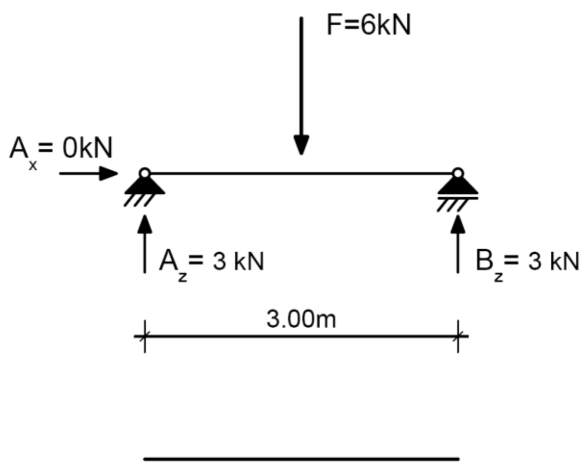


<u>Superposition</u> = Überlagerung

Anlage 4.2



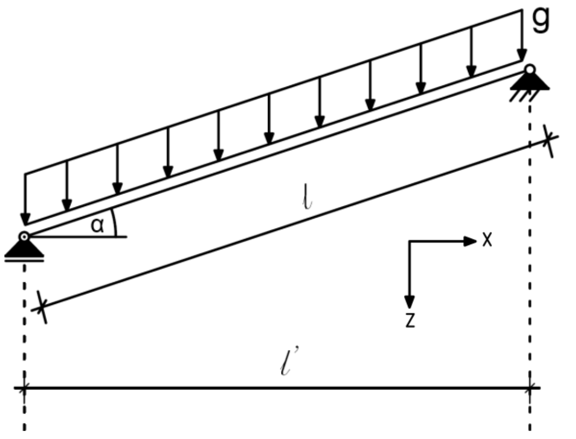


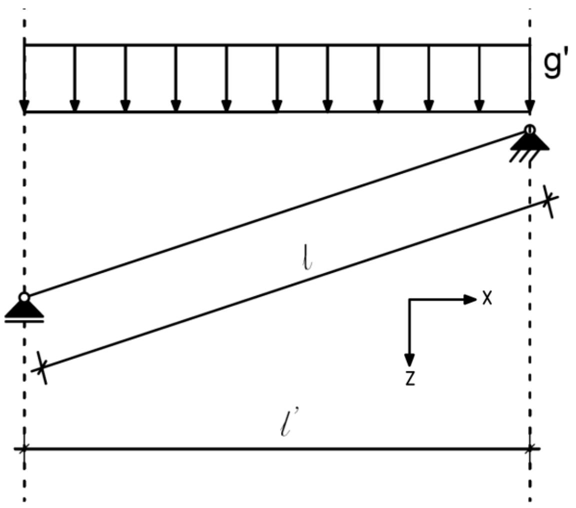


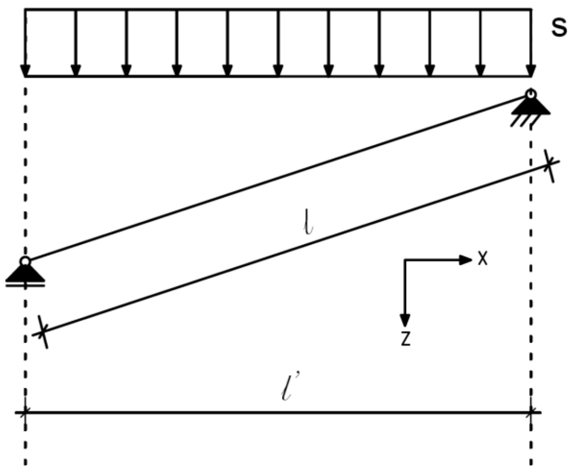
Resultierende werden als Hilfsgröße formuliert, um am „quasi starren" freigeschnittenen Teilsystem oder am Gesamtsystem Gleichgewichtsbetrachtungen anzustellen. Hiermit können zum Beispiel die Auflagerkräfte bestimmt werden. (Diese sind in den oben dargestellten 3 Lastbildern identisch.)!
Bei der Bestimmung von Schnittgrößen (Kap. 5) und Spannungen (2. Sem.) dürfen die Resultierenden nicht verwendet werden, da sie nicht die identische Wirkung auf das Bauteil besitzen.

4.2.4 Linienlast auf geneigtem Balken/ die drei charakteristischen Lastbilder aus dem Ingenieuralltag

1. Globales Lastbild

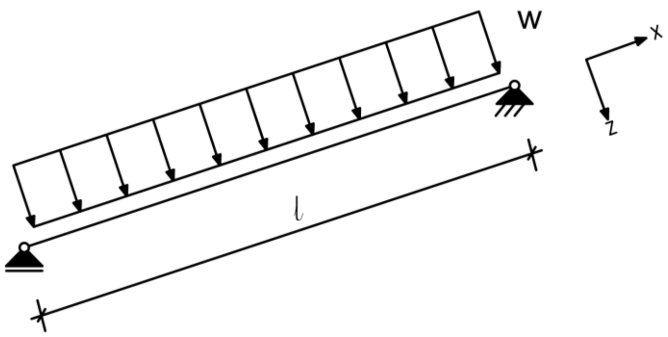


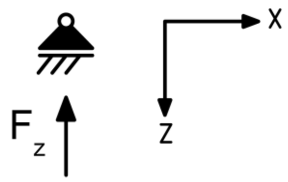
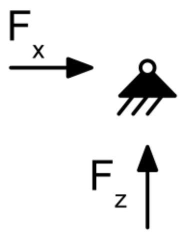
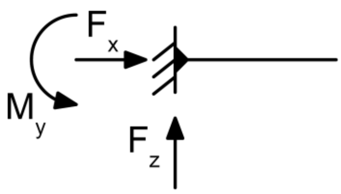
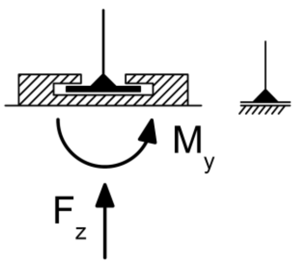
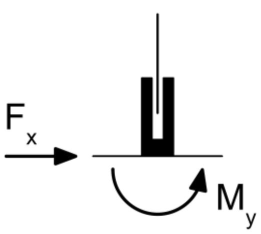


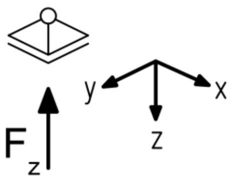
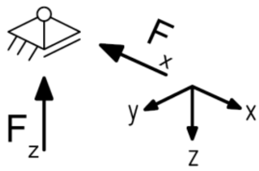
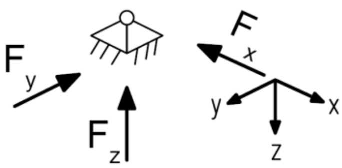
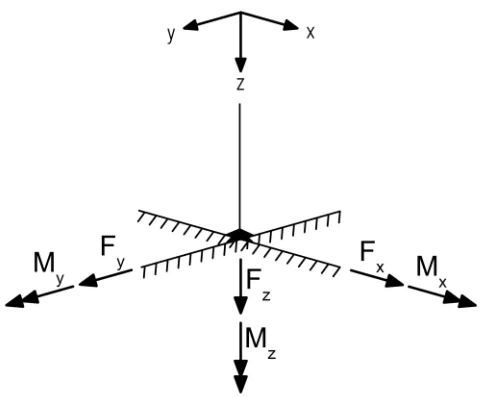


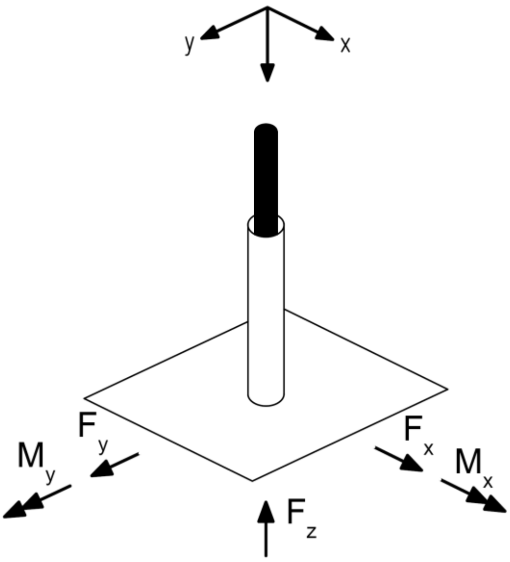
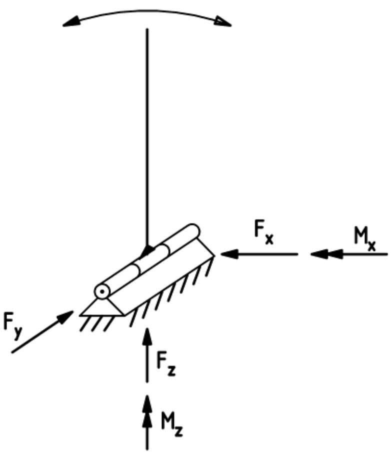
2. Projektives Lastbild

3. Lokales Lastbild

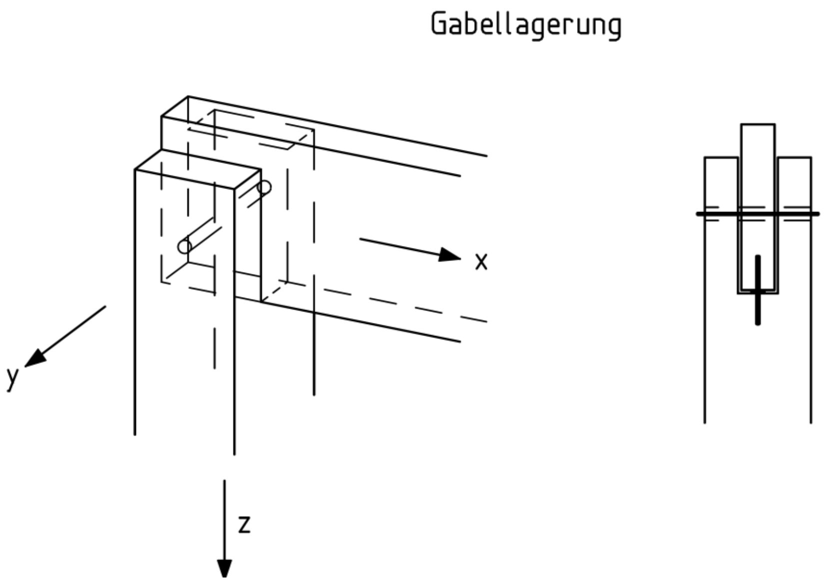
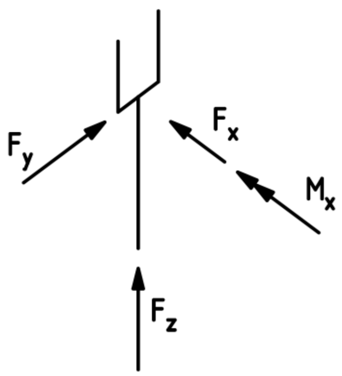


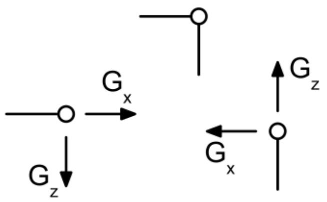
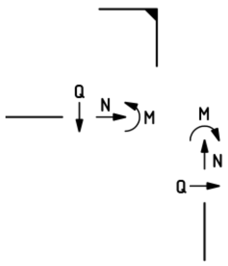
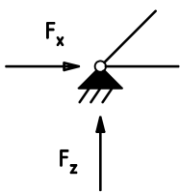
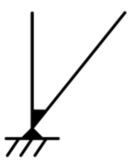
Darstellung	• **behinderte FG** • **Auflagerreaktionen** • **Wertigkeit**	• **Verbleibende FG** • **!Besonderheiten!**
	Ebene	
"Gleitlager" 	• **Translation in z-Richt.** • **1 UB: Fz** **einwertig** ①	• **Translation in x-Richt.** • **Rotation u. d. y-Achse** • **Fx ≡ 0, My ≡ 0**
"Festlager" 	• **Translation in x-Richt.** • **Translation in z-Richt.** • **2 UB: Fx, Fz** **zweiwertig** ②	• **Rotation u. d. y-Achse** • **My ≡ 0**
"Einspannung" 	• **Translation in x-Richt.** • **Translation in z-Richt.** • **Rotation u. d. y-Achse** • **3 UB: Fx, Fz, My** **dreiwertig** ③	**./.**
"biegesteifes Gleitlager" 	• **Translation in z-Richt.** • **Rotation u. d. y-Achse** • **2 UB: Fz, My** **zweiwertig** ②	• **Translation in x-Richt.** • **Fx ≡ 0**
"Teleskoplager" 	• **Translation in x-Richt.** • **Rotation u. d. y-Achse** • **2 UB: Fx, My** **zweiwertig** ②	• **Translation in z-Richt.** • **Fz ≡ 0**

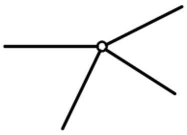
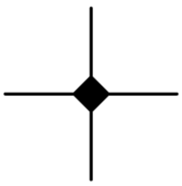
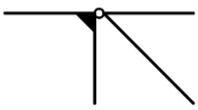
Darstellung	• **behinderte FG** • **Auflagerreaktionen** • **Wertigkeit**	• **Verbleibende FG** • **!Besonderheiten!**
	Raum	
"räumliches Gleitlager" 	• **Translation in z-Richt.** • **1 UB: Fz** **einwertig ①**	
"zweiwertiges Gleitlager" 	• **Translation in x-Richt.** • **Translation in z-Richt.** • **2 UB: Fx, Fz** **zweiwertig ②**	
"räumliches Festlager" 	• **Translation in x-Richt.** • **Translation in y-Richt.** • **Translation in z-Richt.** • **3 UB: Fx, Fy, Fz** **dreiwertig ③**	
"räumliche Einspannung" 	• **Alle Freiheitsgrade** • **6 UB: Fx, Fy, Fz,** **Mx, My, Mz** **sechswertig ⑥**	

Darstellung	• **behinderte FG** • **Auflagerreaktionen** • **Wertigkeit**	• **Verbleibende FG** • **!Besonderheiten!**
	Raum	
"räumliches Teleskoplager" 	• **Alle Translationen** • **Rotation u. d. x-Achse** • **Rotation u. d. y-Achse** • **5 UB: Fx, Fy, Fz, Mx, My** **fünfwertig** ⑤	• **Rotation u. d. z-Achse** • **Mz ≡ 0**
"Scharnier" 	• **Alle Translationen** • **Rotation u. d. y-Achse** • **Rotation u. d. z-Achse** • **5 UB: F_x, F_y, F_z, M_x, M_z** **fünfwertig** ⑤	• **Rotation u. d. y-Achse** • **$M_y \equiv 0$**

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Darstellung	• **behinderte FG** • **Auflagerreaktionen** • **Wertigkeit**	• **Verbleibende FG** • **!Besonderheiten!**
Raum		
Gabellagerung mit Sicherungsdorn 		
	• **Translationen in y- Richt.** • **Translationen in z- Richt.** **Behinderung in x-Richtung fraglich; Einzelfallentscheidung** • **Rotation u. d. x-Achse** **Kippen soll in jedem Fall verhindert werden!** • **3-4 UB: (Fx), Fy, Fz, Mx,** **drei- vierwertig ③-④**	• **Rotation u. d. y-Achse** • **Rotation u. d. z-Achse** • **My ≡ 0, Mz ≡ 0** • **(Fx ≡ 0)**

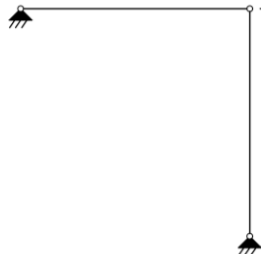
Darstellung	• **behinderte FG** • **Auflagerreaktionen** • **Wertigkeit**	• **Verbleibende FG** • **!Besonderheiten!**
	ebene Gelenke	
		
		
		
		
		

Darstellung	• **behinderte FG** • **Auflagerreaktionen** • **Wertigkeit**	• **Verbleibende FG** • **!Besonderheiten!**
	räumliche Gelenke	
		
		
		
		

4.4 Statische und kinematische Bestimmtheit

4.4.1 Statische Bestimmtheit

Zusammenfassung:



Ziel der Überlegung ist festzustellen, ob entweder

- zu viele Fesseln
- genau ausreichend viele Fesseln
- oder zu wenig Fesseln

im System vorhanden sind.

- Für den Fall, dass zu viele Fesseln vorhanden sind, erhalten wir zu viele Unbekannte. Da es am Bauteil in der Ebene nur 3 Gleichgewichtsbedingungen pro Teilsystem gibt, bedeuten zu viele Fesseln, dass mein System nicht allein mit den Gleichgewichtsbedingungen lösbar ist. **"statisch unbestimmt"**

- Optimal für die Berechnung „mit Hand" ist der Fall, dass exakt gleich viele Fesseln wie Freiheitsgrade vorhanden sind. **"statisch bestimmt"**

- Zu wenige Fesseln bedeuten Instabilität; d. h. den uninteressanten Fall! **"labil"**

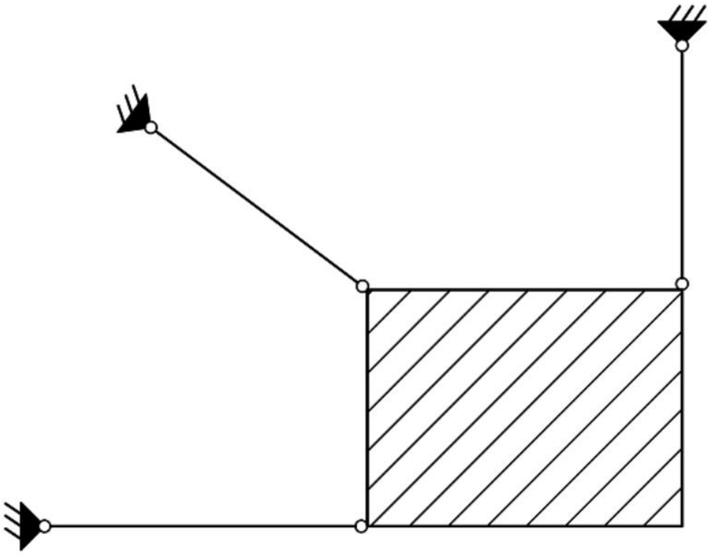
  Aus diesem Grund ermitteln wir den **„Grad der statischen Unbestimmtheit" n**

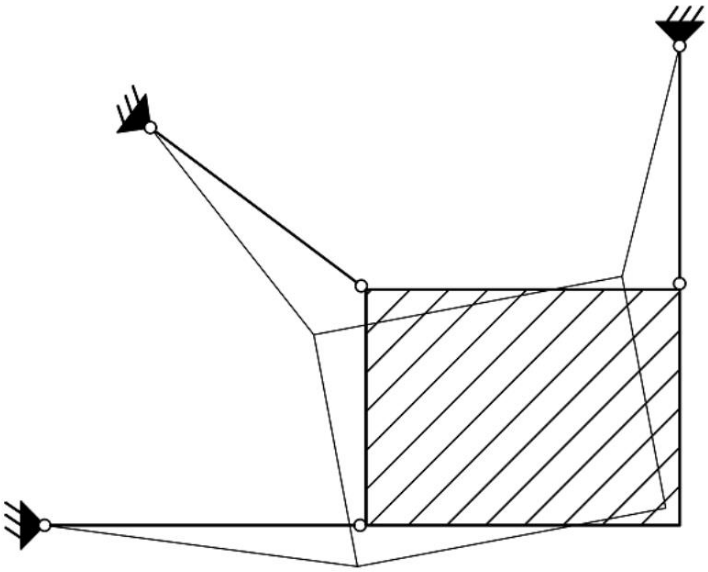
	Anzahl der äußeren Fesseln	Anzahl der inneren Fesseln	Freiheitsgrade
n =	Auflagerreaktionen bzw. Auflagerwertigkeiten	**+** Zwischenreaktionen	-3 Freiheitsgerade pro Element (Ebene) -6 Freiheitsgerade pro Element (Raum)
n =	**A**	**+ Z**	**- 3·S** (Ebene) **- 6·S** (Raum)

Hinweise:

- Die Frage nach der statischen Bestimmtheit ist unabhängig von der Belastung zu sehen. Das System soll jede Art von Belastung aufnehmen können (Ausnahme sind hier die Seile oder Fundamente, die keine abhebenden Lasten aufnehmen können)
- Wir müssen uns entscheiden, in wie viele Elemente wir unser System unterteilen, was aber letztendlich nicht entscheidend ist, sondern eine Geschmacksfrage.

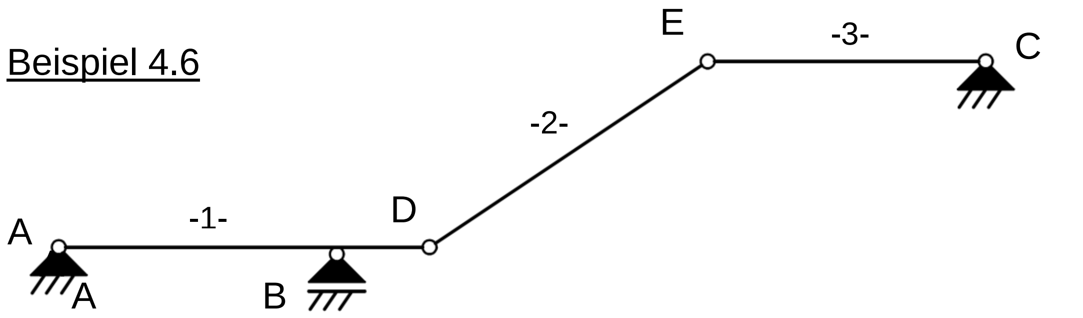
Beispiel 4.5

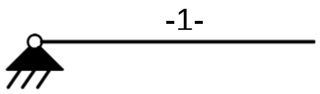


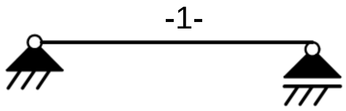


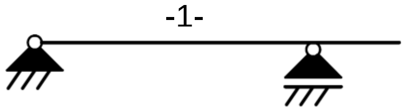
Fazit:
Die Stäbe 1, 2 und 3 erlauben den Punkten D, E und F eine momentane Translation infolge ihrer Rotation um ihr jeweiliges Auflager. Diese Translationen sind aber nur möglich, wenn sie sich gegenseitig nicht ausschließen. Dies wäre der Fall, wenn die Translationen aus der jeweiligen Rotation um ein und denselben Punkt resultieren. Besitzt ein Teilsystem, hier im Beispiel das Rechteck, einen solchen Punkt, so befindet sich dieser auf dem Schnittpunkt aller Senkrechten auf den Bewegungsrichtungen. Das System wäre dann instabil, bzw. kinematisch verschieblich.

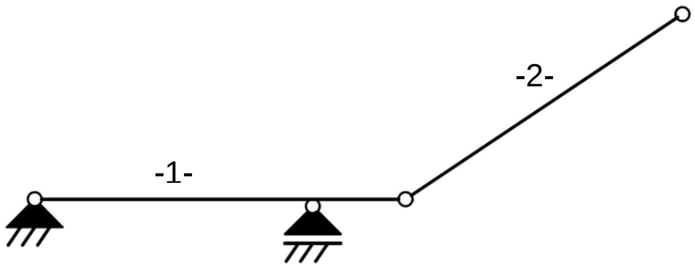
Beispiel 4.6

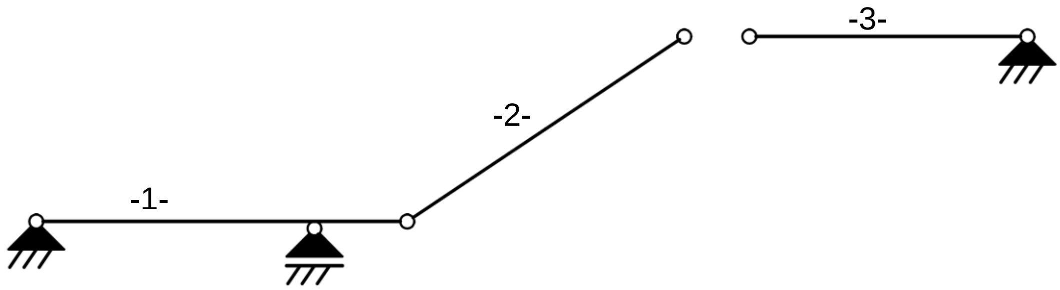




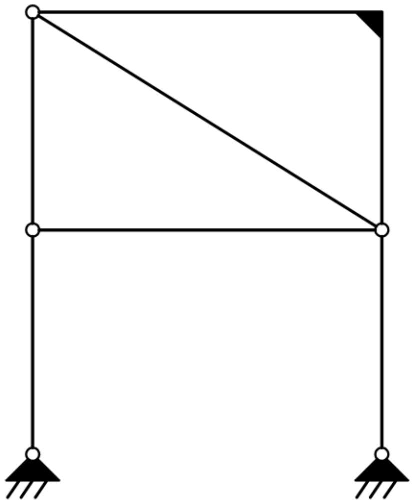


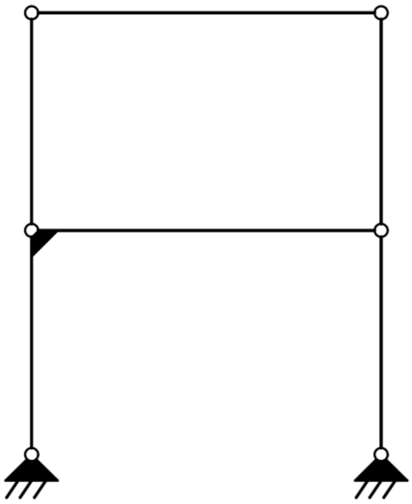


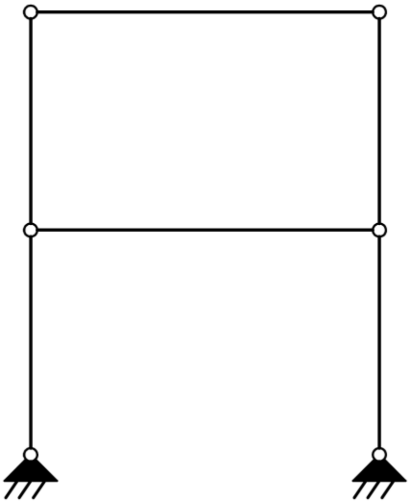




Beispiel 4.7





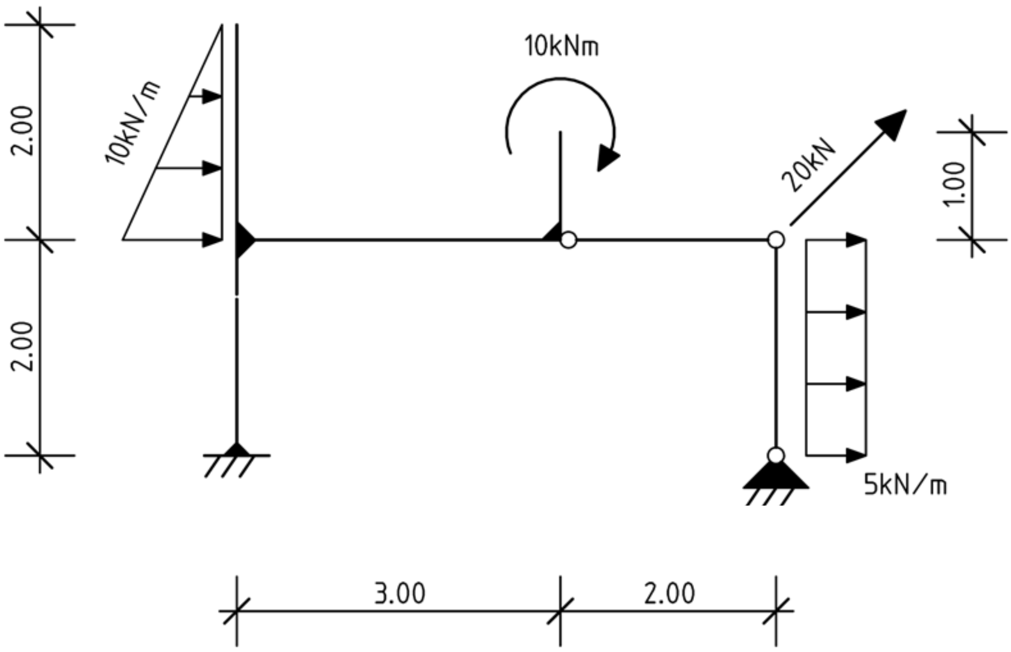


FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

4.5 Auflagerreaktionen

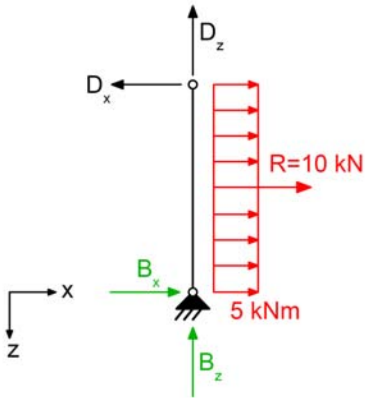
Standardmäßig erfolgt nach dem Nachweis der statischen und kinematischen Bestimmtheit die Bestimmung bzw. die Berechnung der Auflagerreaktionen:
Dies ist bei den statisch bestimmten Systemen allein mit den GGB möglich. Bei mehr als drei unbekannten Auflagersituationen reichen die GGB am Gesamtsystem natürlich nicht aus. Es muss daher frei geschnitten werden, um weitere GGB am Teilsystem zu generieren. Die Schnitte werden i. d. R. durch Gelenke geführt, die es bei statisch bestimmten Systemen ebenfalls i. d. R. gibt.

Beispiel:



5 Auflagerreaktionen > 3 → Freischneiden…

Schnitt 1:



Wahrung des Gleichgewichtes am Teilsystem durch Antragen der:

- Gelenkkräfte
- Auflagerreaktionen
- Belastung

4 Unbekannte > 3 Gleichgewichtsbedingungen → die Unbekannten werden allein im Schnitt 1 nicht ermittelt werden können…

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

GGB am Teilsystem:

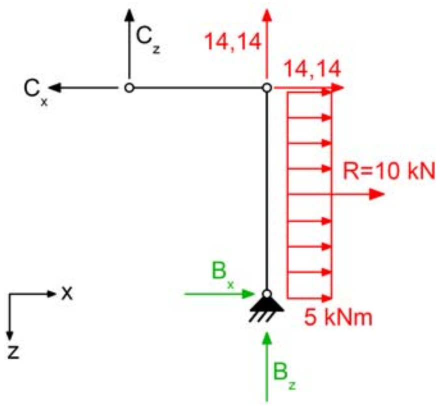
$\Sigma M_D = B_x \cdot 2{,}0 + 10 \cdot 1{,}0 = 0 \rightarrow \underline{B_x = -5\text{ kN}}$

$\Sigma F_x = B_x - D_x + 10 = 0 \rightarrow \underline{D_x} = B_x + 10 = \underline{5\text{ kN}}$

$\Sigma F_z = -B_z - D_z = 0 \rightarrow \underline{B_z = -D_z}$

Zwei Unbekannte konnten ermittelt werden. Die 3. GGB liefert lediglich ein Verhältnis der beiden weiteren Unbekannten, was ja auch eine wertvolle Information bedeutet…

Schnitt 2:



$\Sigma M_C = +14{,}14 \cdot 2{,}0 + 10 \cdot 1{,}0 + B_x \cdot 2{,}0 + B_z \cdot 2{,}0 = 0 \rightarrow \underline{B_z = -14{,}14\text{ kN}}$

B_x und B_z sind somit berechnet. Für die Auflagerreaktionen benötigt man die Gelenkkräfte C_x, C_z, D_x und D_z grundsätzlich nicht. Von den fünf unbekannten Auflagerkräften wurden nun bereits zwei bestimmt. Zur Lösung der drei weiteren Unbekannten wird auf die 3 Gleichgewichtsbedingungen am Gesamtsystem zurückgegriffen um A_x, A_z und M_{yA} zu bestimmen:

$\Sigma F_x = A_x + B_x + 10 + 10 + 14{,}14 = 0 \rightarrow \underline{A_x = -29{,}14\text{ kN}}$

$\Sigma F_z = -A_z - B_z - 14{,}14 = 0 \rightarrow \underline{A_z = 0}$

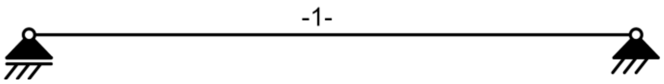
$\Sigma M_A = -10 \cdot 2{,}67 - 10 - 14{,}14 \cdot 2{,}0 + 14{,}14 \cdot 5{,}0 - 10 \cdot 1{,}0 + \underline{B_z} \cdot 5{,}0 - M_{y,A} = 0$

$\rightarrow \underline{M_{y,A} = -74{,}95\text{ kNm}}$

Im Punkt A gilt grundsätzlich, wie überall im System, dass die Summe der Momente natürlich gleich Null sein muss (da ja Gleichgewicht herrschen muss), aber das Moment im Punkt selbst kann wegen der Einspannung durchaus einen Wert annehmen.

4.6 Der statisch bestimmte Einfeldträger

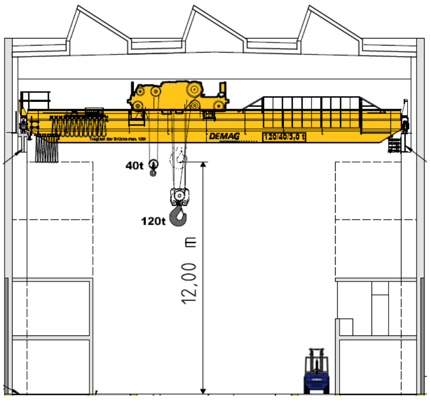
Der Einfeldträger ist das häufigste und u. a. das einfachste statische System in der Mechanik.



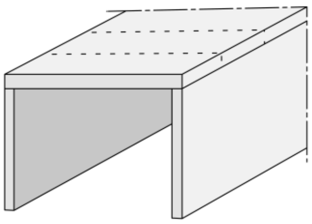
Beispiele aus der Baupraxis sind Balken von Holzdecken (Bild a), Brückenkräne (Bild b), aber auch Platten, die modellhaft, also gedanklich, in eine Schar nebeneinander liegender Plattenstreifen unterteilt werden (Bild c) und dann als Einfeldträger nach der Balkentheorie statt nach der Plattentheorie behandelt werden.

a)

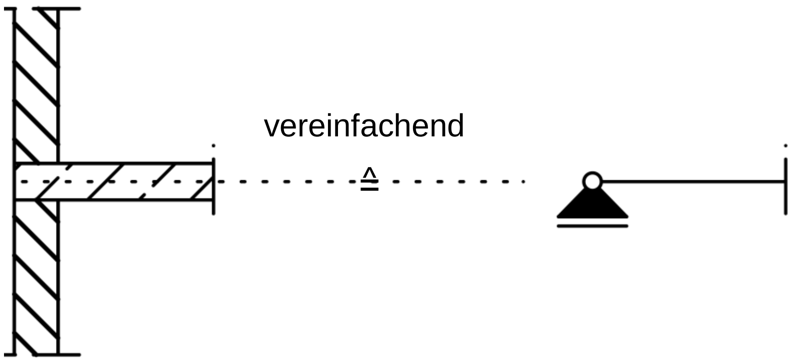
b)



c)



Obwohl solche Träger (bzw. Balken) in der Praxis an den Enden einen teilweise biegesteifen Anschluss haben, wird im Modell der Einfeldträger oftmals als beidseitig gelenkig angenommen (sichere Seite).

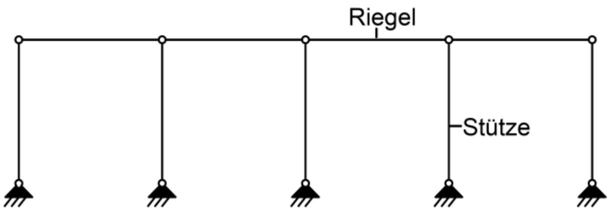
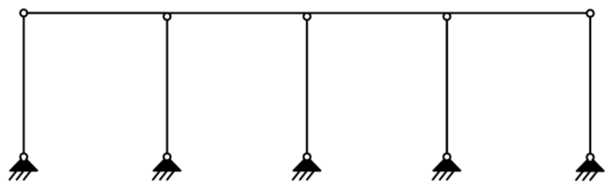


Einfeldträger erfahren die unterschiedlichsten Einzellasten und Linienlasten. Werte für die Auflagerreaktionen und Schnittgrößen wurden in Tabellen zusammengestellt.

Warum statisch bestimmt…?

Statisch unbestimmte Systeme (n>0; zu viele Fesseln) haben den Vorteil höherer Steifigkeit, geringerer Verformungen und einer gewissen Redundanz im Versagensfall!

Beispiel: Hallenseitenwand

statisch bestimmt	statisch unbestimmt
	
$n = 10 + 20 - 3 \cdot 10 = 0$ In der Regel wird jedoch kein ausführendes Unternehmen diesen Riegel in eine Gruppe von Einfeldträgern unterteilen.	$n = 10 + 27 - 3 \cdot 11 = 4$ 4-fach statisch unbestimmt
↓ Nachteil ↑ Vorteil	
↓ aufwendiger in der Herstellung ↓ stärkere Verformungen ↓ keine Redundanz ↑ zwängungsfrei bei Temperaturänderung	↓ aufwendiger in der Berechnung ↑ geringere Verformungen ↑ Redundanz hinsichtlich Systemsicherheit ↓ bei Temperaturänderung treten Zwängungen auf!

MS 4.5: Statisch bestimmte Systeme (n=0) sind hinsichtlich einer Temperaturbeanspruchung frei von Zwangskräften und Zwangsmomenten.