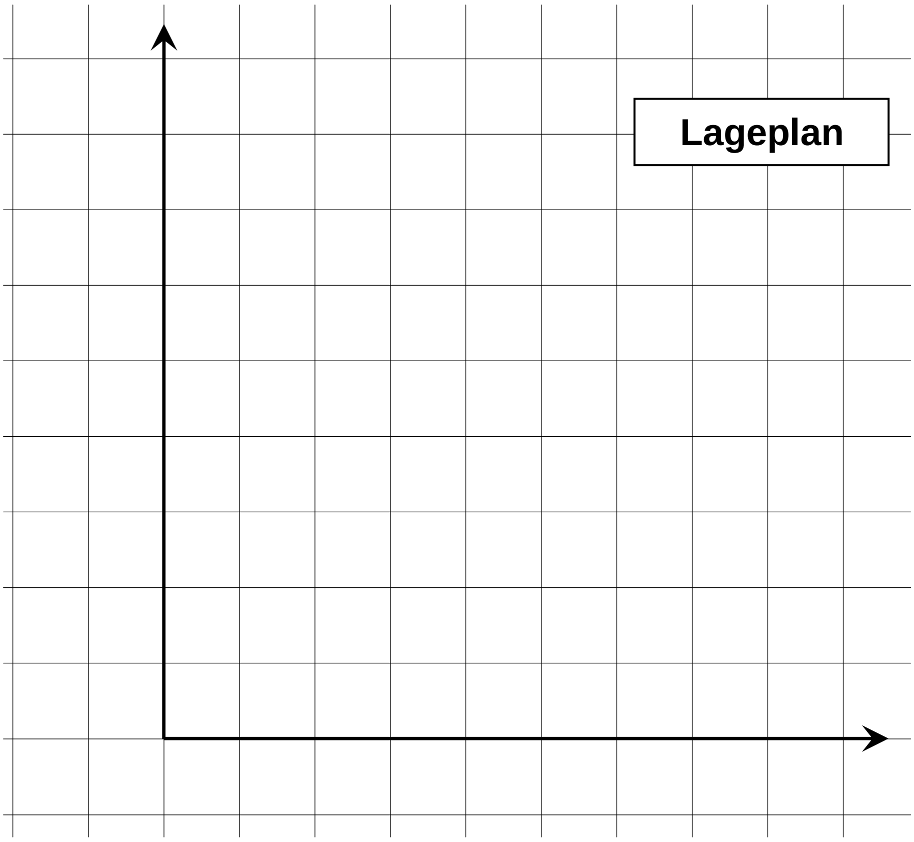
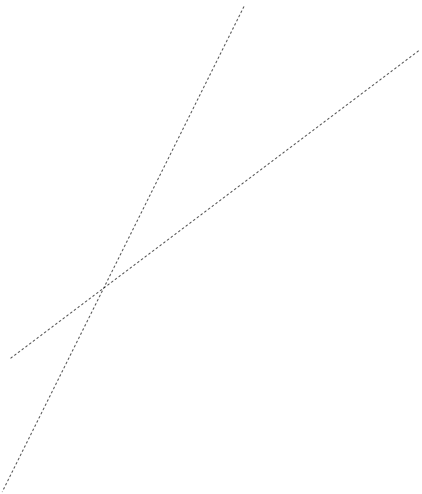
Beispiel 2.1: Zentrale Kräftegruppe mit zwei Kräften

Gegeben sind zwei Kraftvektoren, deren Wirkungslinien durch den Koordinatenursprung (0/0) verlaufen: $\tilde{F}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; $\tilde{F}_2 = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

Es sind die Lage, der Betrag und die Richtung von F_1, F_2 und der Resultierenden graphisch und numerisch zu bestimmen!



Kräfteplan

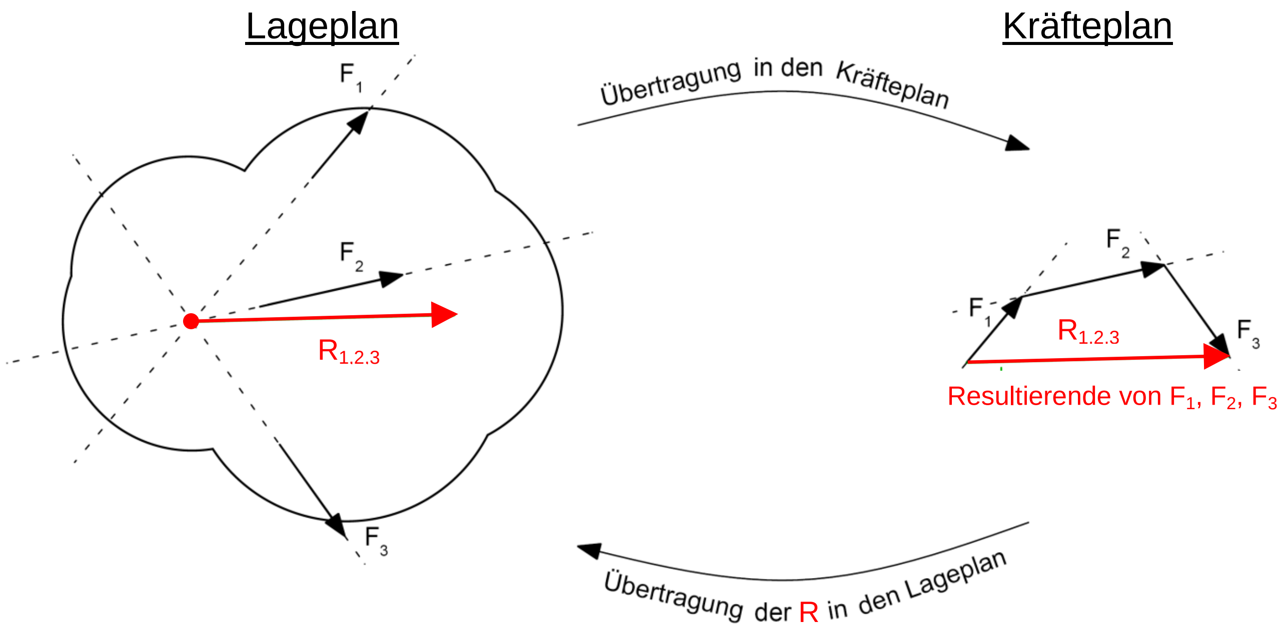


Kommentar:

Die graphischen Verfahren sind mit Abstand die anschaulichsten, aber auch die zuverlässigsten Lösungswege. Ihre Genauigkeit hängt unmittelbar von der Zeichengenauigkeit ab (eventuell ein Nachteil). Aber es ist im Besonderen ein Vorteil, dass man so gut wie nie ein Fehler hinsichtlich der Größenordnung macht (10^n). Blütezeit der graphischen Lösung war die 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts (Eiffel, Ritter, Cremoma, Culmann).
Heute sind graphische Verfahren im Ingenieuralltag nicht mehr verankert, aber sie dienen dem Ingenieur zur Verifikation von Ergebnissen.

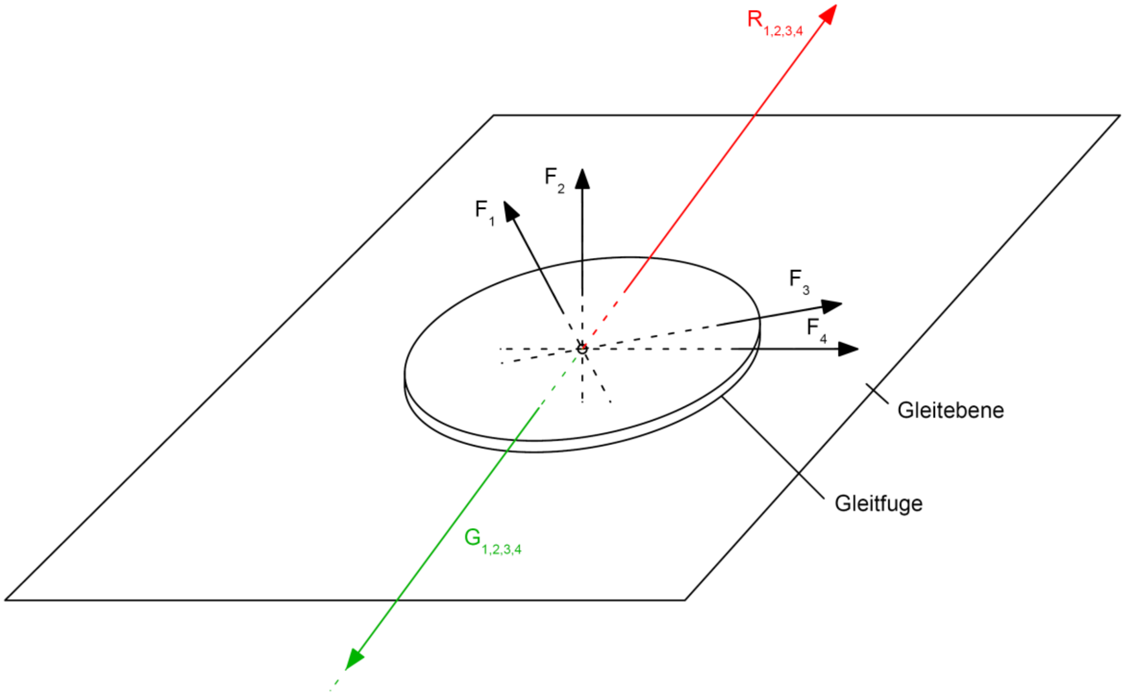
Allgemeine Regel zur Addition von Vektoren, die nicht auf einer WL liegen

Wir unterscheiden bei der graphischen Addition bzw. Behandlung von Kräften zwei Darstellungsformen:



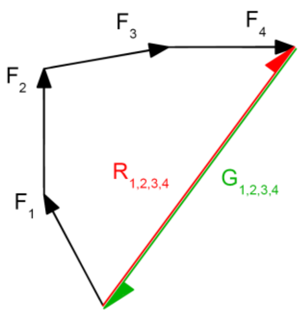
Lageplan	Kräfteplan
Im Lageplan sind die Kräfte eindeutig in ihrer richtigen Lage dargestellt. → d.h. in ihrer Wirkung auf den Körper richtig wiedergegeben bzw. dargestellt.	Die Kräfte werden parallel in den K-Plan verschoben, so dass sie ein Vieleck ergeben. Grundsätzlich falsch in der Darstellung ist die Tatsache, dass sich die WL´s der Kräfte nicht in einem Punkt schneiden. Ihre Wirkung auf den Körper entspricht in dieser Darstellung nicht der Wirkung der ursprünglichen ZKG.

! <u>Fehlerquelle</u>: die Begriffe Resultierende und Gegenkraft !



R: Die Resultierende hat <u>die identische Wirkung</u> wie F_1, F_2, F_3 und F_4

<u>„actio"</u>



G Die Gegenkraft <u>setzt die ZKG ins Gleichgewicht</u> <u>„reactio"</u>

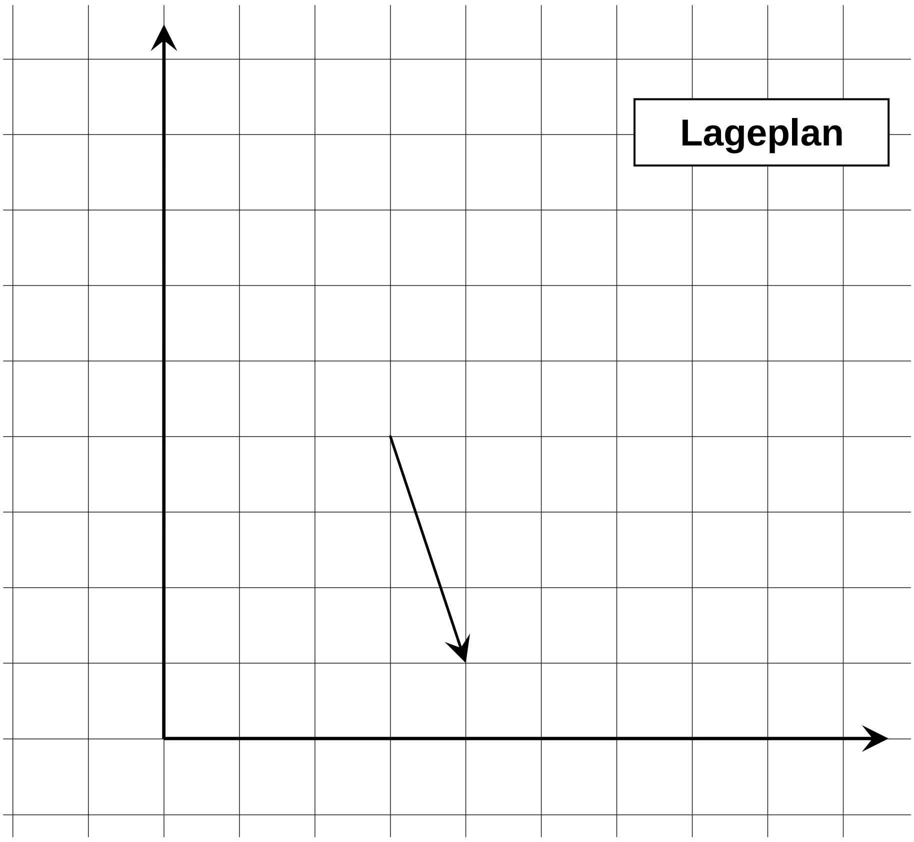
Sie muss R mit gleichem Betrag $|G| = |R|$ auf ihrer WL entgegen wirken.

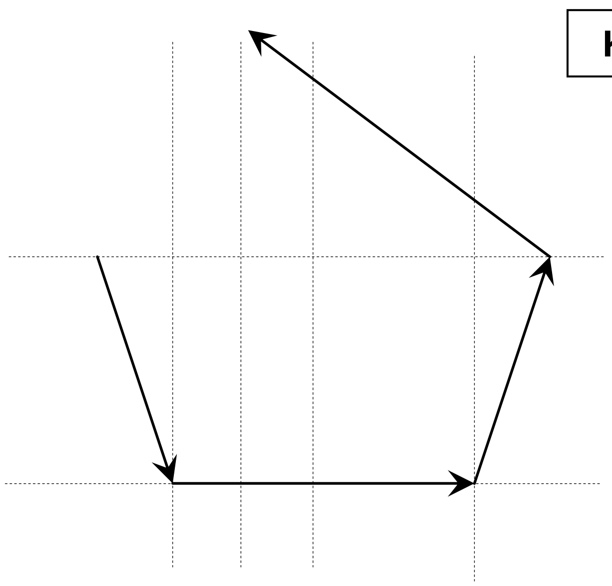
G steht also entweder mit F_1 bis F_4 oder mit R im Gleichgewicht! (aber nicht beides gleichzeitig!)

Beispiel zu 2.3: Zentrale Kräftegruppe mit mehreren Kräften

Gegeben sind vier Kraftvektoren, deren Wirkungslinien alle durch den Punkt (3/4) verlaufen: $\tilde{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\tilde{F}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\tilde{F}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\tilde{F}_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$;

Es sind die Lage, der Betrag und die Richtung der Resultierenden graphisch und numerisch zu bestimmen!





2.4 Die zwei Gleichgewichtsbedingungen des Punktes in der Ebene

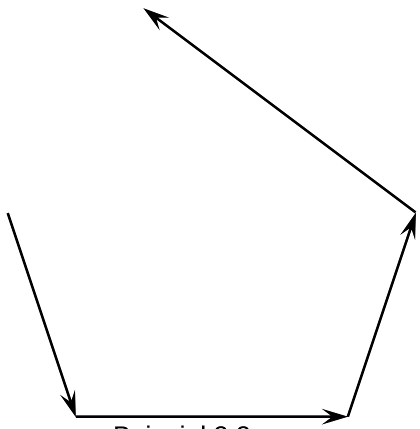
Im Beispiel 2.3 steht die ZKG im Gleichgewicht, da die Resultierende im Kräfteplan Null ergibt bzw. das Kräftevieleck geschlossen ist.

…

Dies ist aber eben das ureigene Ziel der Statik, nämlich Gleichgewicht herzustellen bzw. rechnerisch nachzuweisen. In diesem Zusammenhang greifen wir noch einmal Beispiel 2.2 auf:

Ergänzen wir in diesem Kräftevieleck eine Kraft, die wir derart anordnen, so dass das Kräftevieleck geschlossen ist, so wäre die Kräftegruppe im Gleichgewicht. Die ergänzte Kraft wäre dann nichts anderes als die Gegenkraft, welche die ZKG ins Gleichgewicht setzt.

Graphisch wäre damit die Aufgabe gelöst. Der Zusammenhang liefert uns aber genauso einen rechnerischen Lösungsweg, indem wir auch hier eine Kraft ergänzen:



Beispiel 2.2

…

Wir erinnern uns an die quasi „Entkopplung" orthogonaler Richtungen und erhalten somit getrennt für die beiden Richtungen zwei entkoppelte Gleichungen. Jede dieser Geleichung enthält nur eine Unbekannte, die separat also entkoppelt nach dieser aufgelöst werden können. Wir erhalten so die 2 Gleichgewichtsbedingungen (GGB) in der Ebene und schreiben wie folgt:

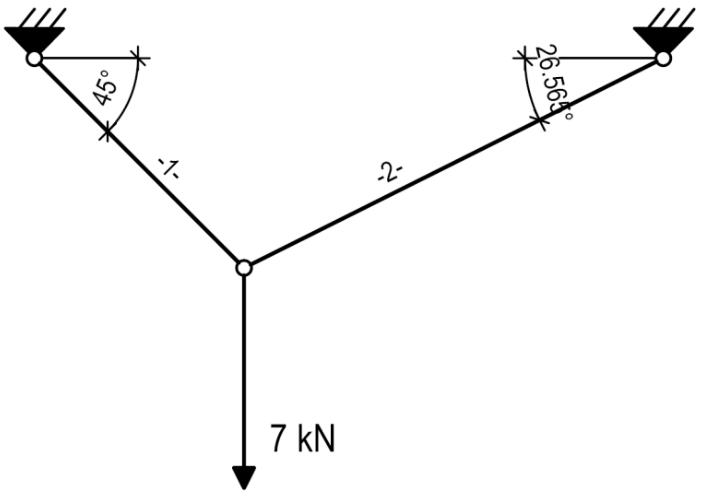
1. GGB: „Die Summe aller Kräfte in x-Richtung muss gleich Null sein!"

…

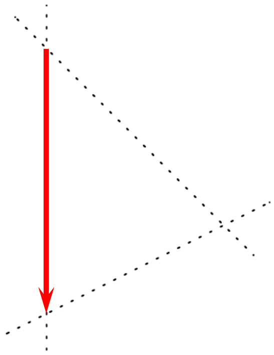
2. GGB: „Die Summe aller Kräfte in y-Richtung muss gleich Null sein!"

…

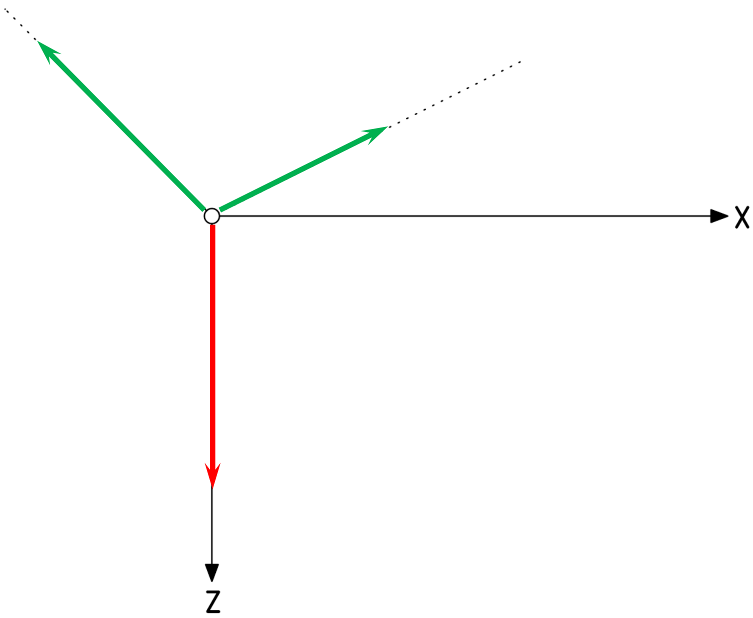
Beispiel 2.4: Seilabhängung



Maßstab: 1 cm = 2 kN

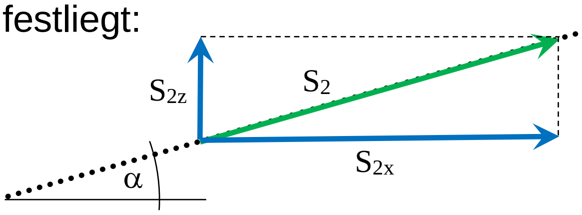


Freischneiden: Das Freischneiden ist ein Grundwerkzeug im Ingenieuralltag. Nach dem Freischneiden des Knotens werden die äußeren Kräfte und die Unbekannten Seilkräfte angetragen. Da die Seile nur Zug aufnehmen können, ist die WL der Seilkräfte identisch mit der Seillängsachse. Anschließend werden alle Kräfte in die orthogonalen Komponenten zerlegt:



…besitzt das System nach Komponentenbildung nunmehr 4 Unbekannte?...

MS 2.5: Die Zerlegung einer unbekannten Kraft, deren WL allerdings bekannt ist, in ihre Komponenten bedeutet keine Erzeugung weiterer Unbekannten, da über die Steigung der WL, das Verhältnis der beiden Komponenten festliegt:



$$\boxed{S_{2z}/S_{2x} = \tan\alpha}$$

Rechnerische Standardlösung:

Für 2 Unbekannte sind die 2 Gleichgewichtsbedingungen der Ebene ausreichend.

1. GGB:

$\sum F_x = - S_{1x} + S_{2x} = 0 \Rightarrow S_{1x} = S_{2x}$ ①

2. GGB:

$\sum F_z = - S_{1z} - S_{2z} + 7 = 0 \Rightarrow S_{1z} = 7 - S_{2z}$ ②

Die Gleichgewichtsbedingungen sind nun erschöpft. Es verbleiben die geometrischen Verhältnisse, da die WL der Unbekannten bekannt ist. Wir erhalten über die Steigungsdreiecke:

$S_{1x} = S_{1z}$ und… ③

$S_{2x} = 2\ S_{2z}$ ④

Wir erhalten nunmehr mathematisch 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten. Durch gegenseitiges Einsetzen erhalten wir mit rel. viel Aufwand die Ergebnisse:

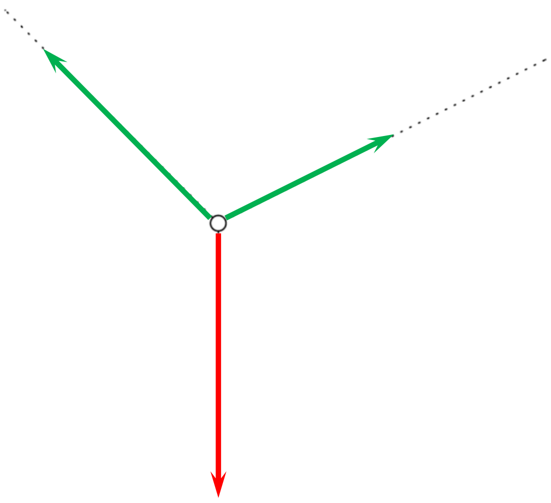
$S_{1z} = 4{,}67$ kN ; $S_{2z} = 2{,}33$ kN ; $S_{1x} = 4{,}67$ kN ; $S_{2x} = 4{,}67$ kN ;

Die Resultierenden ergeben die Seilkräfte:

$S_1 = 6{,}6$ kN ; $S_2 = 5{,}22$ kN

Der deutlich geschicktere Lösungsansatz:

Wir drehen das Koordinatensystem soweit, bis die WL einer Unbekannten mit einer Koordinatenachse identisch ist. Dies ist hier im Beispiel S_2 und x‘.
Fazit siehe Blatt 4 unten…



Interpretation der Ergebnisse zu Beispiel 2.4

Bei dem Prozess des Freischneidens (hier ein Knoten in der Ebene) nehmen wir die unbekannten (Stab- oder Seilkräfte) immer als Zugstäbe an, also als Vektoren, die vom Knoten bzw. der Schnittstelle wegziehen.
Dadurch werden in weiterer Konsequenz die Vorzeichen für die Komponenten festgelegt und gehen somit in die GGB ein, ohne dass wir die Vorzeichen kennen.

Warum?

a) Erhalten wir als Ergebnis ein positives Vorzeichen, so wissen wir:

- dass die Richtung richtig angenommen wurde
- im Besonderen aber wird mit dem positiven Vorzeichen angegeben, dass eine Zugkraft herrscht

➢ Zugkräften wird im Ingenieuralltag stets das positive Vorzeichen zugewiesen.

b) Erhalten wir ein negatives Ergebnis so erkennen wir:

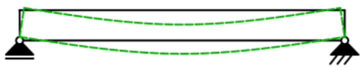
- dass die Richtung falsch angenommen war
- aber das negative Vorzeichen weist auch in diesem Fall eindeutig auf eine Druckbeanspruchung hin

➢ Druckkräften wird im Ingenieuralltag stets das negative Vorzeichen zugewiesen.

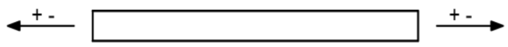
Diese Vereinbarung ist konform mit der allgemein anerkannten und gültigen Ansicht, dass Zugkräfte wegen ihrer positiven Eigenschaften auch das positive Vorzeichen "verdient" haben und Druckkräfte wegen der Knickgefahr eher negativ ins Gewicht fallen.

I.d.R. suchen wir nicht nur aus Gründen der Effizienz, sondern in erster Linie wegen der geringeren Fehleranfälligkeit einen kürzeren und übersichtlicheren Lösungsweg:
Das Koordinatensystem kann ja durchaus beliebig gedreht werden, solange die Orthogonalität bestehen bleibt. Wir können, insbesondere bei zwei unbekannten Kräften, so geschickt drehen, dass möglichst eine WL einer unbekannten Kraft mit einer Koordinatenrichtung übereinstimmt (hier S_2 und die x'-Richtung). Somit besitzt diese Kraft in der dazu senkrechten Richtung, der y'-Richtung keine Komponente und tritt bei der Summe aller Kräfte in y'-Richtung nicht in Erscheinung (Entkopplung beider GGB). Sie tritt dann erfreulicher Weise nicht als Unbekannte in Erscheinung, und wir erhalten im besten Fall eine Gleichung mit nur einer Unbekannten.

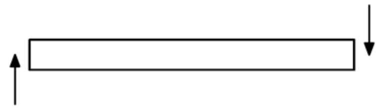
2.5 <u>Die vier charakteristischen Beanspruchungen und ihre konstruktive Ausbildung</u> *(vergl. Hierzu power -point Vortrag)*



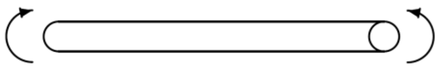
- Biegung



- Zug- und Druckbeanspruchung



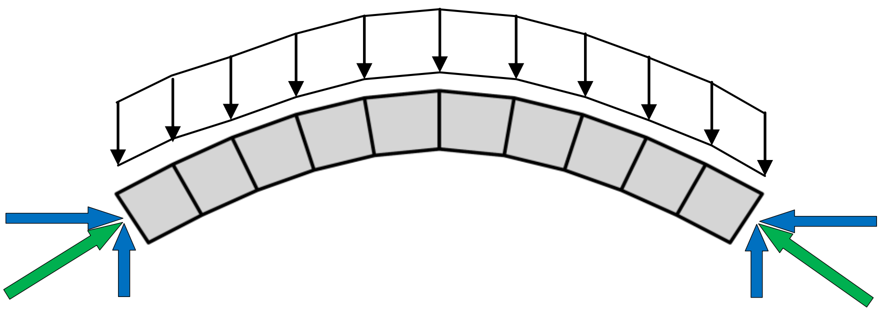
- Querkraft (Kraft senkrecht zur Stabachse)



- Torsion (Verdrehung um die Stablängsachse)

Die <u>Biegung</u> ist die ungünstigste Beanspruchung. Der natürlichste Werkstoff, der eine Biegebeanspruchung verträgt, ist der gewachsene Holzträger. Im 19. Jhd. kam der hochwertige Baustahl zur Anwendung, der deutlich höhere Biegebeanspruchungen aufnehmen kann. Der Stahlbeton ist infolge seiner Zugbewehrung auch in der Lage Biegung aufzunehmen. Er ist wegen seiner massiven Bauweise schwerer als der Stahlbau, und weniger leistungsfähig, jedoch deutlich günstiger.

Um größere Stützweiten zu realisieren, wurden in der Geschichte Bögen gemauert (auch wegen der feuerbeständigen Bauweisen sehr geeignet). Dies sind jedoch keine Biegeträger, sondern Träger, deren Tragverhalten „von Stein zu Stein" auf der Druckkraftübertragung basieren. Hierbei besteht grundsätzlich das Problem des Knickens bzw. Ausweichens aus der Bogenebene, sowie der große horizontale Druck auf die Auflager mit flacher werdendem Bogen.



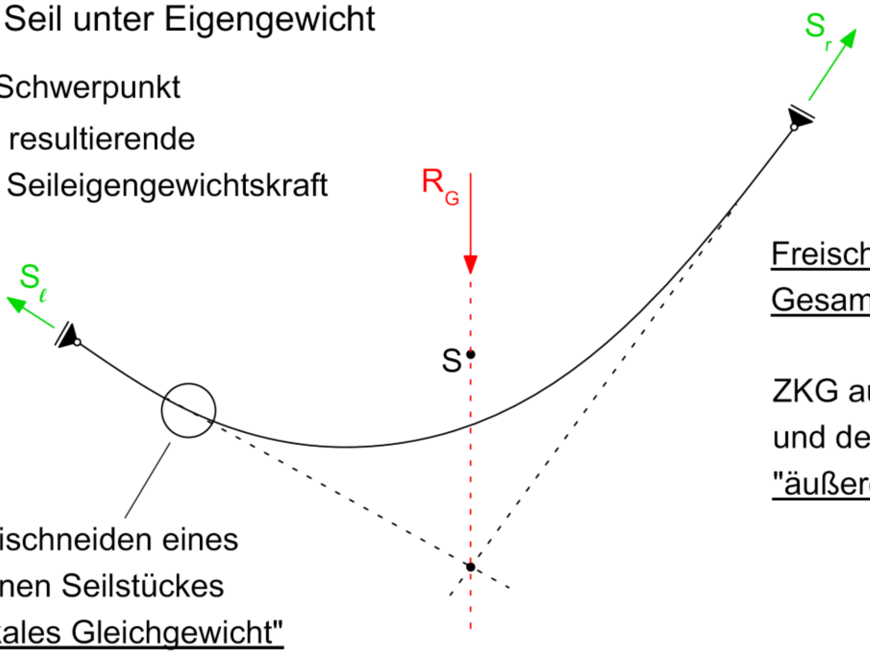
Bei extrem großen Stützweiten muss letztendlich auf das Seil als optimales Tragwerk zurückgegriffen werden, dessen "Stützweiten" bzw. Hängeweiten unbegrenzt erscheinen (vgl. Kapitel 2.6).

2.6 Das Seil als optimales Tragwerk

① Seil unter Eigengewicht

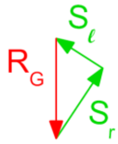
S: Schwerpunkt

R_G: resultierende Seileigengewichtskraft

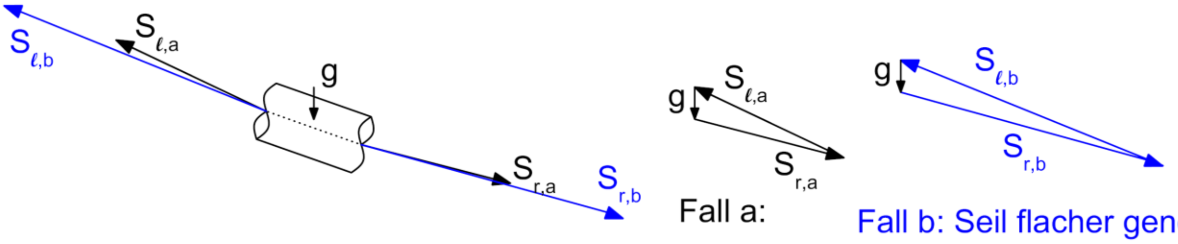


Freischneiden eines kleinen Seilstückes "lokales Gleichgewicht"

Freischneiden des Gesamtsystems

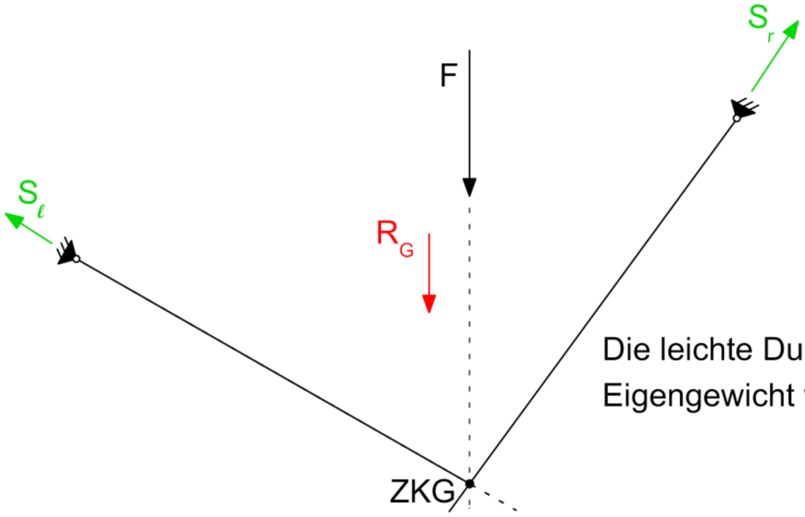


ZKG aus Seileigengewicht R und den Auflagern "äußeres Gleichgewicht"



Bei stramm gespannten Seilen wird im Kräfteplan an jeder Stelle des Seiles das Kräftedreieck flacher; somit werden die Seilkräfte unter Seileigengewicht größer.

② Seil unter Eigengewicht und Einzellast F, wobei F » R_G



Die leichte Durchbiegung infolge Eigengewicht wird vernachlässigt!

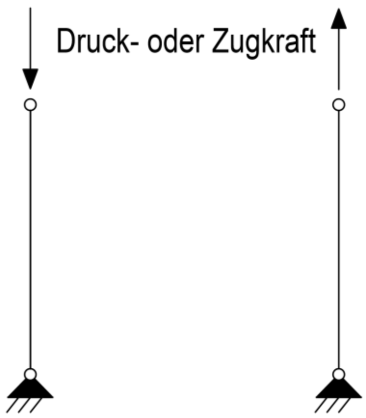
Fazit: Das Seil bringt sich unter jeglicher Belastung in eine optimale Lage ! Es wird grundsätzlich an jeder Stelle auf Zug beansprucht !

2.7 Der Pendelstab

Die nächste einfache Form eines Bauteils ist der so genannte Pendelstab: dies ist

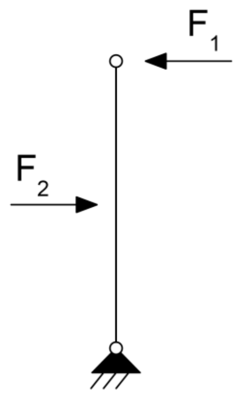
…ein Stab, der beidseitig gelenkig angeschlossen ist!

Dieser Stab kann nur Zug- und Druckkräfte übertragen.



Eine Kraft quer zur Stablängsachse sowie ein Moment (Kap. 3) können nicht aufgenommen werden.

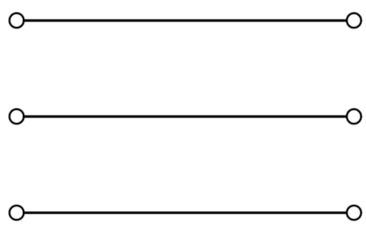
Die beidseitige gelenkige Verbindung am Auflager oder am restlichen angeschlossenen System ist nur eine notwendige Bedingung für einen Pendelstab. Die hinreichende Bedingung lautet: es dürfen auf dem Stab zwischen den Gelenken keine Belastungen auftreten.



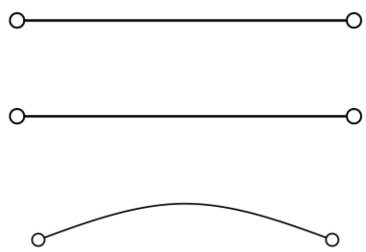
Der Vorteil liegt im Umkehrschluss in der Tatsache begründet, dass wir Momente und Querkräfte als Unbekannte ausschließen dürfen. Die einzige Kraft, die wirken kann ist die Stabkraft, deren WL stets in Stablängsrichtung verläuft.

Gegenbeispiel:
Der Stab links im Bild wird durch F_1 und F_2 im Gleichgewicht gehalten, erfährt also sowohl eine Kraft senkrecht zur Stabachse, als auch eine Biegebeanspruchung (erkennbar an der Verformung). Trotz seines gelenkigen Anschlusses gilt er nicht als Pendelstab.

Merksatz 2.6: Ein beidseitig gelenkig angeschlossener, gerader Stab heißt „Pendelstab“, wenn zwischen den Gelenken keine Kraft mit einer Komponente senkrecht zur Stabachse und kein Moment wirkt (Kap. 3).

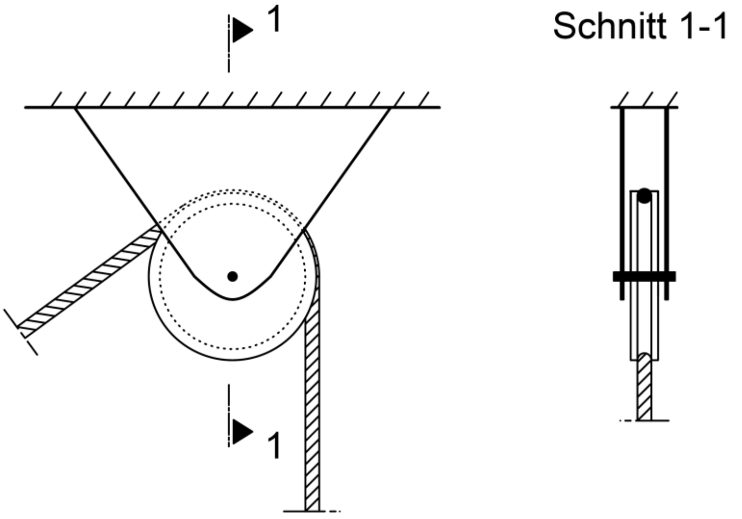


Pendelstab



kein Pendelstab

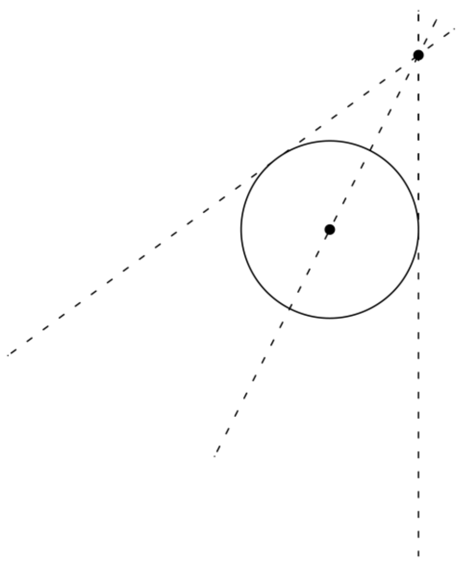
2.8 "Seile über Rollen"



-Seil und Rollenmassen Seien unberücksichtigt!

-Lagerung der Rolle sei reibungsfrei!

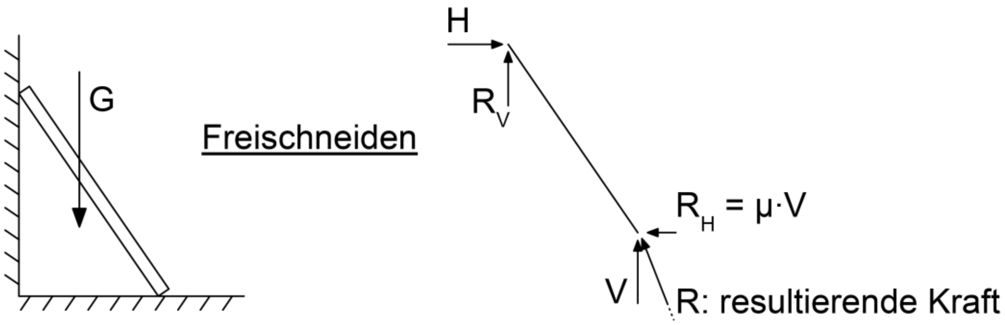
An der Rolle, als Zentrum der zentralen Kräftegruppe, greifen drei Kräfte an:



1. Wir erkennen bzw. wissen, dass die Auflagerreaktionen A durch die Rollenachse verlaufen muss.
2. Die Auflagerreaktion A ist die Gegenkraft zu S und G, aber auch die „dritte Kraft" der Kräftegruppe → 3 Kräfte, dessen Wirkungslinien nicht parallel sind, bilden eine zentrale Kräftegruppe → somit verläuft A auch durch den gemeinsamen Angriffspunkt

2.9 Kraftübertragung auf reibungsbehafteten und reibungsfreien Kontaktflächen

Reibungsbehaftet:

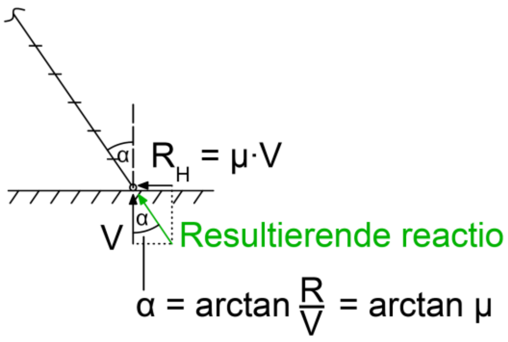


Das Verhältnis von Anpresskraft (Kontaktkraft) und Reibkräfte wird proportional behandelt.
Die Größe der max. zu erwirkenden Reibkraft ist abhängig von dem Reibungskoeffizienten μ der benachbarten Materialien und von der Größe der Kontaktkraft (N), die senkrecht zur Kontaktebene wirkt.

$$R = \mu \cdot N \qquad \text{oben im Bild: } \mu = \frac{R_H}{V} \qquad \text{bzw.} \qquad \mu = \frac{R_V}{H}$$

Da der Wert μ das Verhältnis zwischen Kontaktkraft und Reibkraft angibt, ist der Winkel der Resultierenden bekannt.
→ Man spricht daher auch vom so genannten „Reibungswinkel".

Beispiel: Leiter



Wenn α > arctan μ,
dann wird die horizontale actio größer als die max. Reibkraft
→ Leiter rutscht weg !!!

Reibungsfrei : $\mu = 0$

Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass bei reibungsfreien Kontaktflächen ($\mu \cong 0$) die resultierende Kraft auf die Kontaktfläche senkrecht zu ihr wirken muss, da sich keine Reibkraft (bzw. keine Kraft || zur Kontaktfläche) einstellen kann.