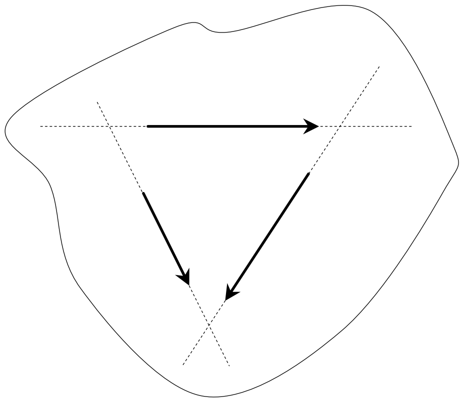
Kapitel 3: Allgemeine Kräftegruppen (AKG)

3.1 Allgemeines

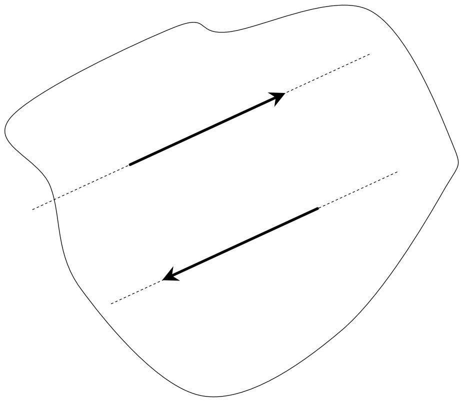
Lernziel Kapitel 3:

- der 3. Freiheitsgrad der Rotation,
- die 3. Gleichgewichtsbedingung
- der Begriff des Momentes



AKG: Gruppe von Kräften, deren Wirkungslinien nicht durch einen Punkt verlaufen, sondern beliebig!

Ein besonderer Fall der AKG ist das sog. "Äquivalente Kräftepaar":



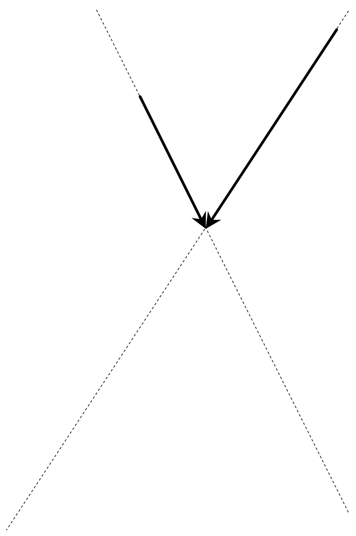
Ein weiterer Sonderfall neben der ZKG ist das sogenannte "äquivalente Kräftepaar". Dies besteht aus zwei gleichgroßen Kräften, die auf parallelen Wirkungslinien einander entgegen wirken.

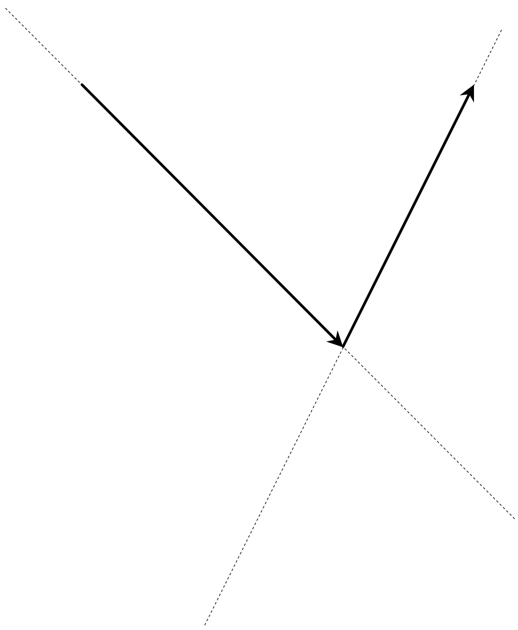
Die Resultierende ergibt sich aus:

$$\sum F_x = R = 0$$

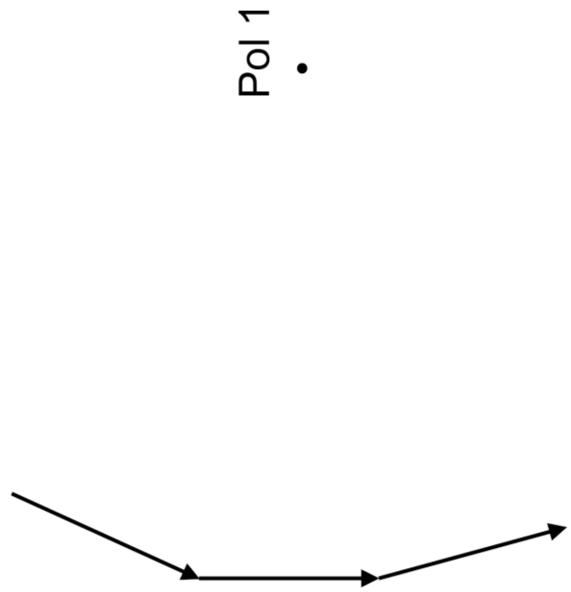
3.2 Reduzierung einer AKG

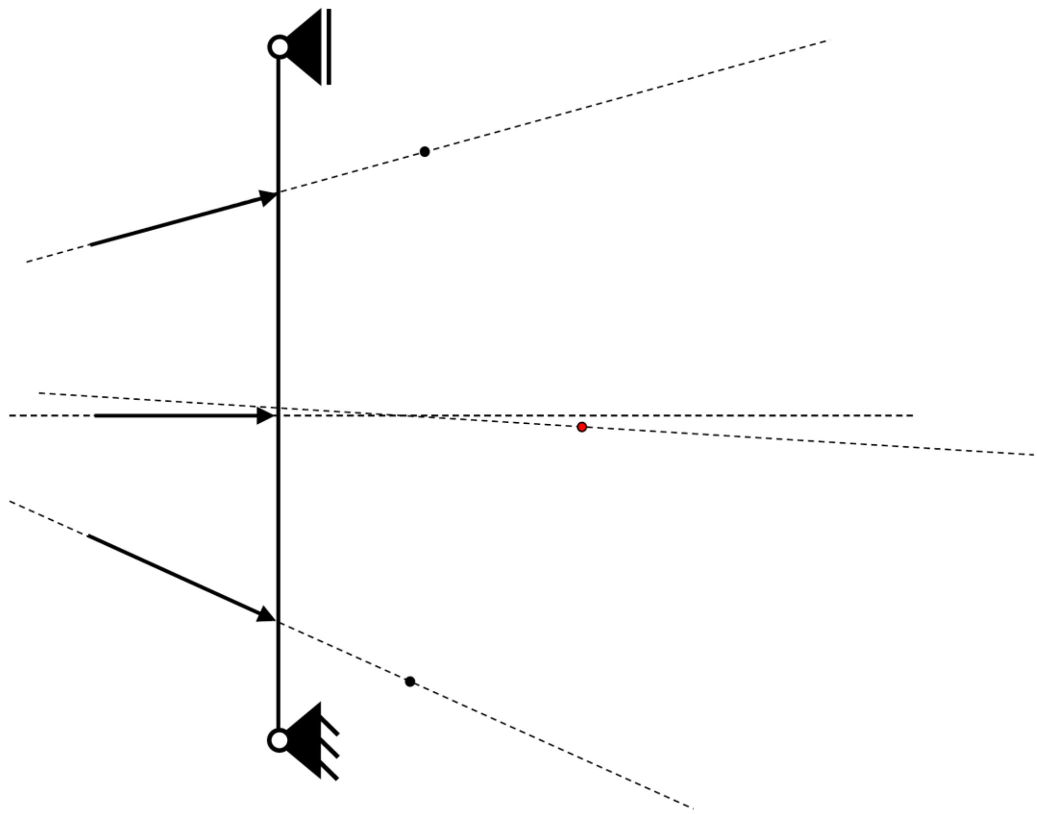
3.2.1 Reduzierung einer AKG mit Hilfe von Teilresultierenden



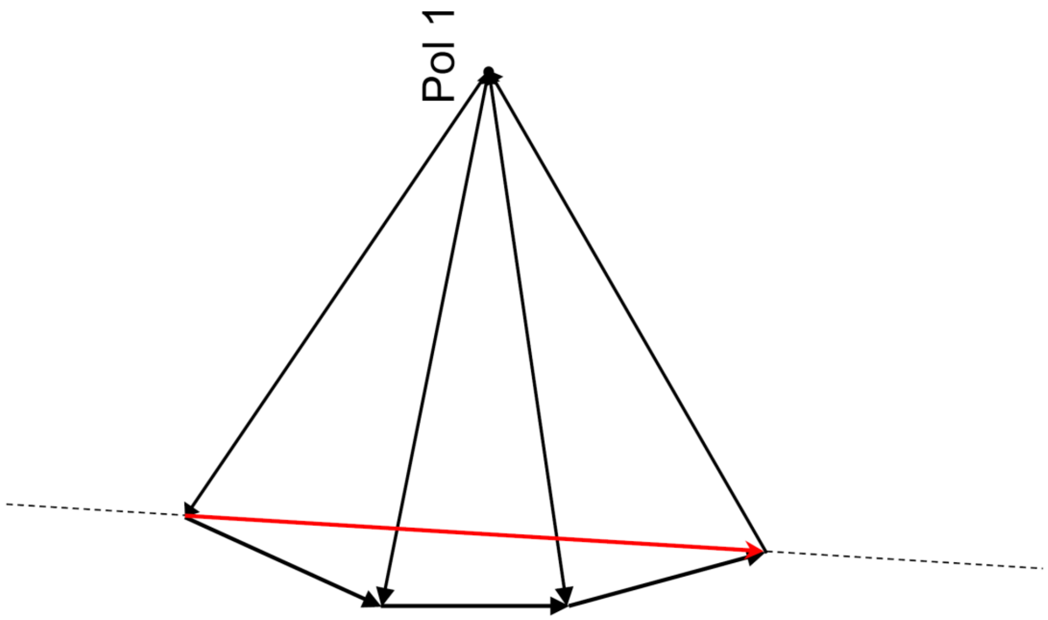


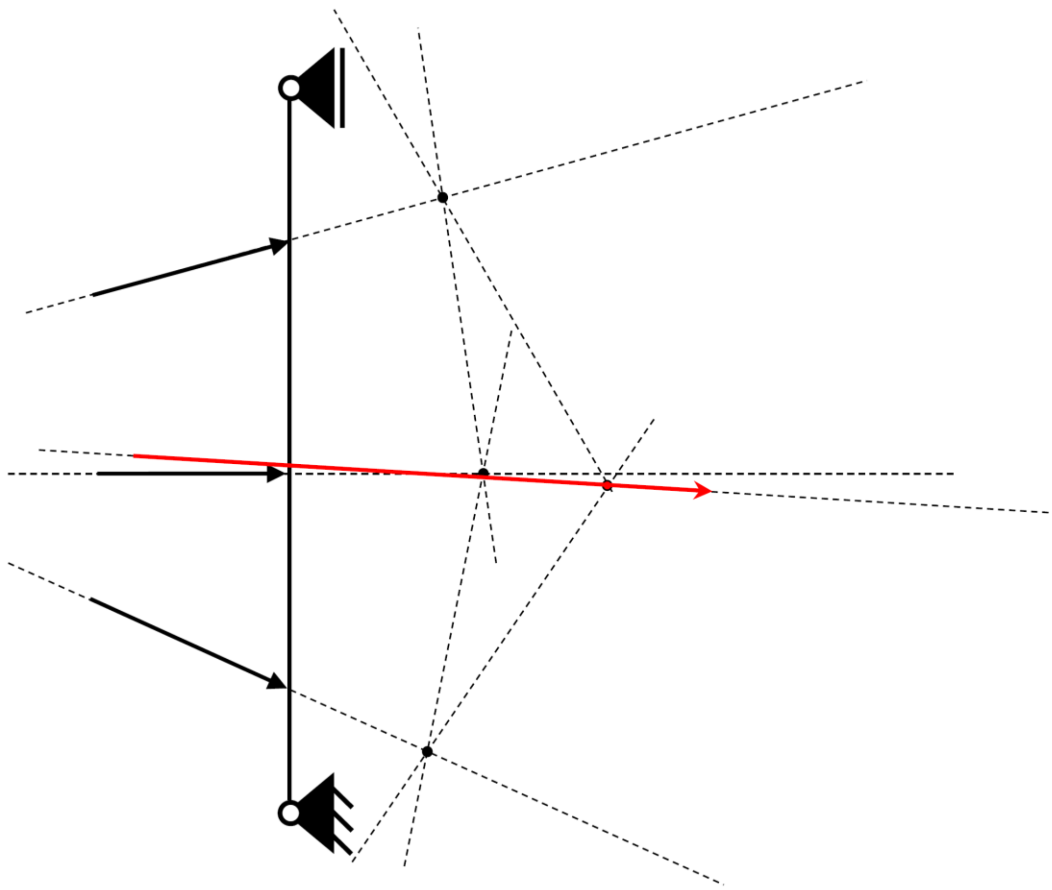
Beispiel 3.2: Seileckverfahren (Biegeträger mit drei Kräften)





Beispiel 3.2: Seileckverfahren (Biegeträger mit drei Kräften)





Vorgehensweise beim Seileckverfahren

1. Alle Kräfte greifen auf einem Körper an. Betrag und Richtung der Resultierenden ergeben sich mittels Vektoraddition (Kräfteplan).
2. Wahl eines geeigneten Pols und Konstruktion eines „Fächers" aus Hilfskräften bzw. Kräftedreiecken. Jedes Dreieck stellt eine im Gleichgewicht befindliche zentrale Kräftegruppe dar.
3. Übertragung der Wirkungslinien der ersten beiden Hilfskräfte in den Lageplan, denn es gilt:

$$F_1 + H_1 + H_2 = 0$$

4. Dies gilt für jedes weitere Dreieck analog:

$$F_n + H_n + H_{n+1} = 0$$

resultierend gilt dann für das umhüllende Dreieck:

$$R + H_1 + H_{n+1} = 0$$

5. Die Wirkungslinie von R verläuft daher im Lageplan durch den Schnittpunkt von H_1 und H_{n+1}.

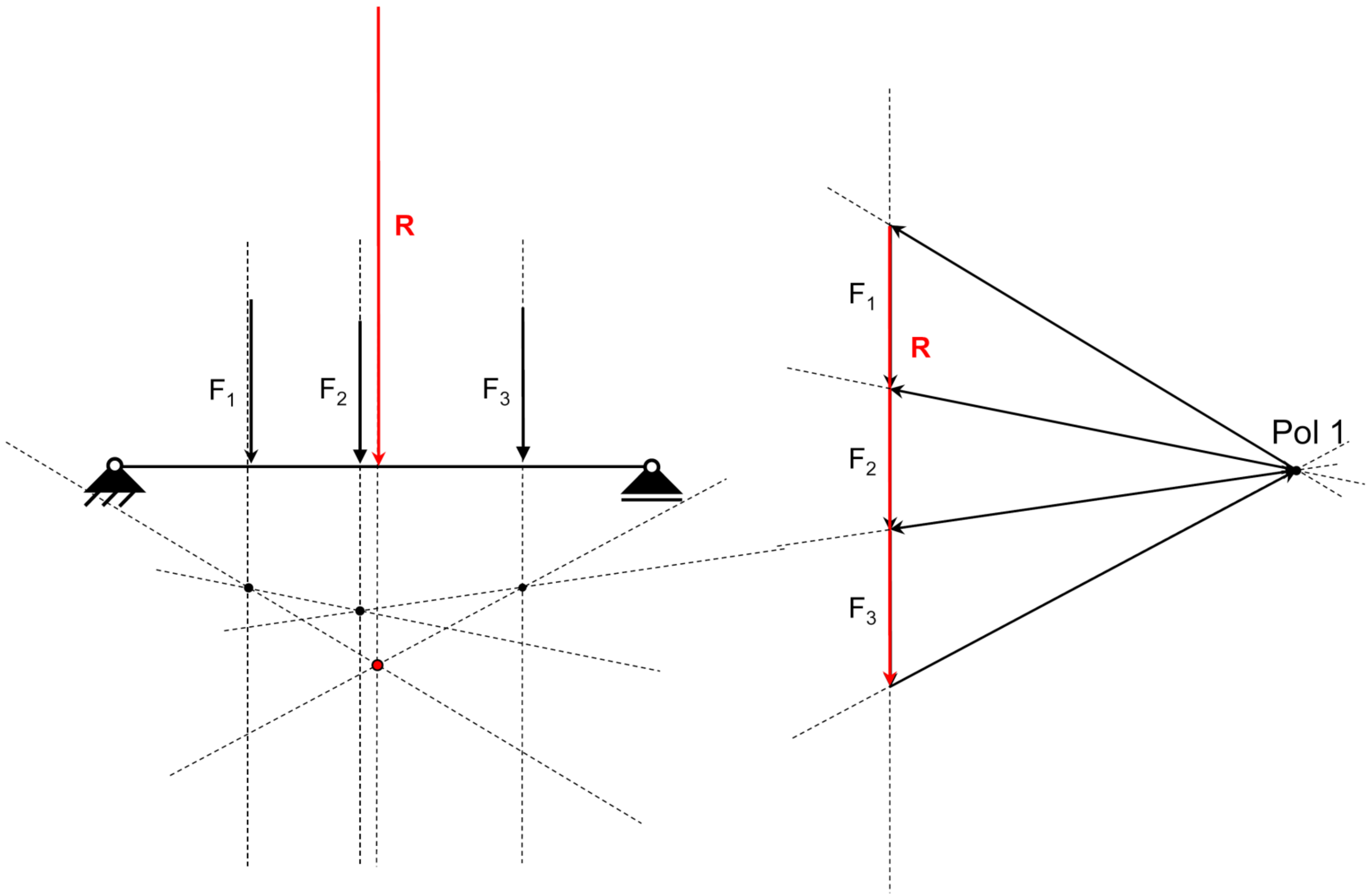
Somit ist das allgemeine Kräftesystem auf eine resultierende Kraft reduziert worden. Wir können also nun die Kräftegruppe durch Aufbringen einer Kraft (Satz vom Gleichgewicht zweier Kräfte) ins Gleichgewicht setzen und verhindern somit

Translation und Rotation

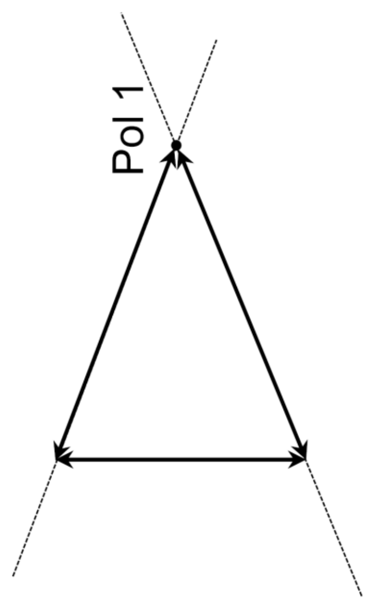
des betrachteten Körpers.

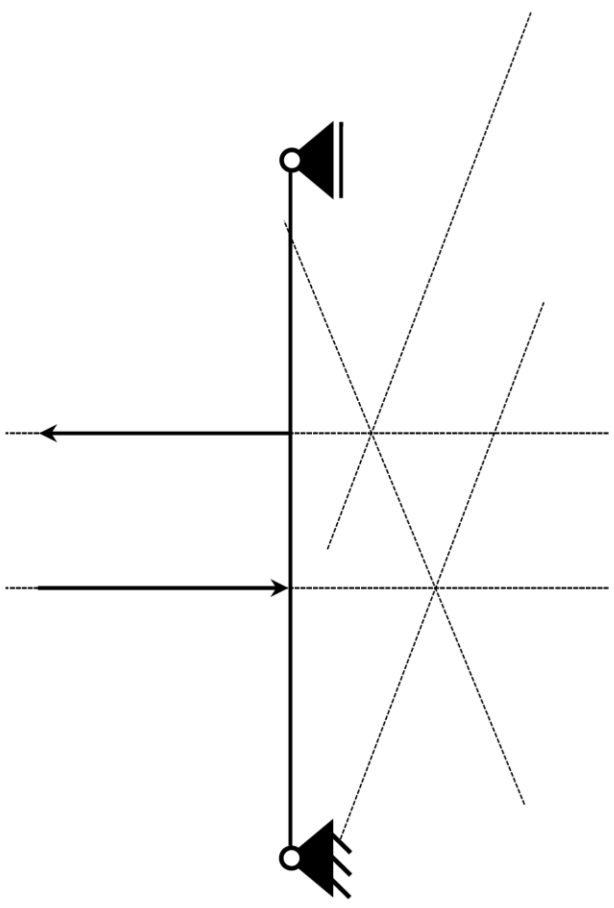
Beispiel 3.3: Seileckverfahren mit parallelen Wirkungslinien

Biegeträger mit drei parallelen Kräften:



Beispiel 3.4: Das äquivalente Kräftepaar





Fazit:

- Die beiden gleichgroßen Kräfte F_1 und F_2 ergeben selbstverständlich auf parallelen Wirkungslinien eine Resultierende, die gleich Null ist. $R = 0$!
- Die Lage der Resultierenden konnte konsequenterweise nicht ermittelt werden, da H_1 und H_3 auf parallelen Wirkungslinien liegen und keinen eindeutigen Schnittpunkt bilden.
- Die „reactio" (auf F_1 und F_2) in Form der Auflagerkräfte auf das äquivalente Kräftepaar F_1, F_2 ist ebenfalls wieder ein äquivalentes Kräftepaar, welches natürlich einen entgegengesetzten Drehsinn besitzt.
- A und B sind gleich groß und wirken entgegengesetzt, da $\sum F_z = 0$ gelten muss.
- A und B sind vom Betrag her zwar gleich groß, aber kleiner als F_1 und F_2, da sie kein direktes Kräftegleichgewicht erzeugen, sondern lediglich eine Gegenwirkung zu dem resultierenden Moment (Drehwirkung) bewirken müssen. Da das Moment aus dem Produkt von Kräftepaar und seinem Abstand gebildet wird, kann eine geringere Kraft (A beziehungsweise B) durch einen größeren Hebel (b) kompensiert werden.
- Das äquivalente Kräftepaar F_1 und F_2 hat keine eindeutig definierte Lage, sondern nur einen definierten Abstand.
- Die Wirkungslinien des reagierenden Kräftepaares müssen natürlich parallel zueinander sein, jedoch nicht unbedingt parallel zu den Wirkungslinien des angreifenden Kräftepaares.

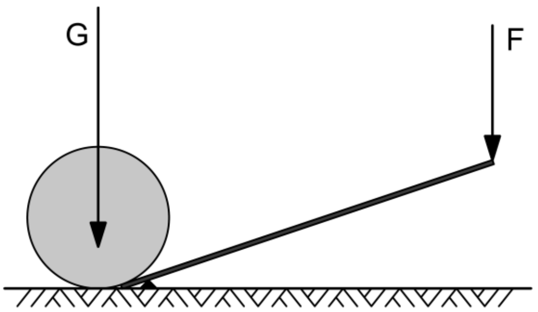
Aufgrund der Summe dieser Erkenntnisse und Vermutungen wird der Momentenvektor in seiner Wirkung auf den starren Körper als „freier Vektor" bezeichnet!

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

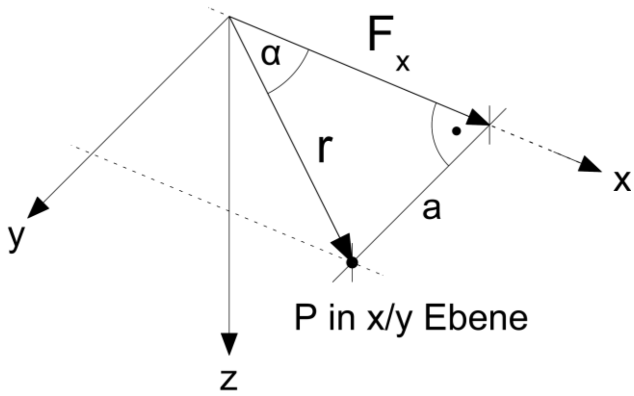
Zusammenfassung mit mathematischer Formulierung

Ein „äquivalentes Kräftepaar" bewirkt auf einen Körper ein Moment. Ist dieser Körper nicht ausreichend gelagert, so erfährt der Körper eine Drehbeschleunigung. Er erfährt jedoch keine Translation, da R = 0. Die mögliche Rotation geschieht um die Achse, die senkrecht auf der Ebene steht, in der das äquivalente Kräftepaar wirkt!
Die Betrachtung von Momenten setzt daher grundsätzlich eine räumliche Betrachtung voraus, da die Kraft, der Hebel und das resultierende Moment aus beiden immer auf alle drei Koordinatenrichtungen verteilt sind.

Ein Moment basiert immer auf einem äquivalenten Kräftepaar, oftmals geht augenscheinlich die zweite Kraft verloren …?



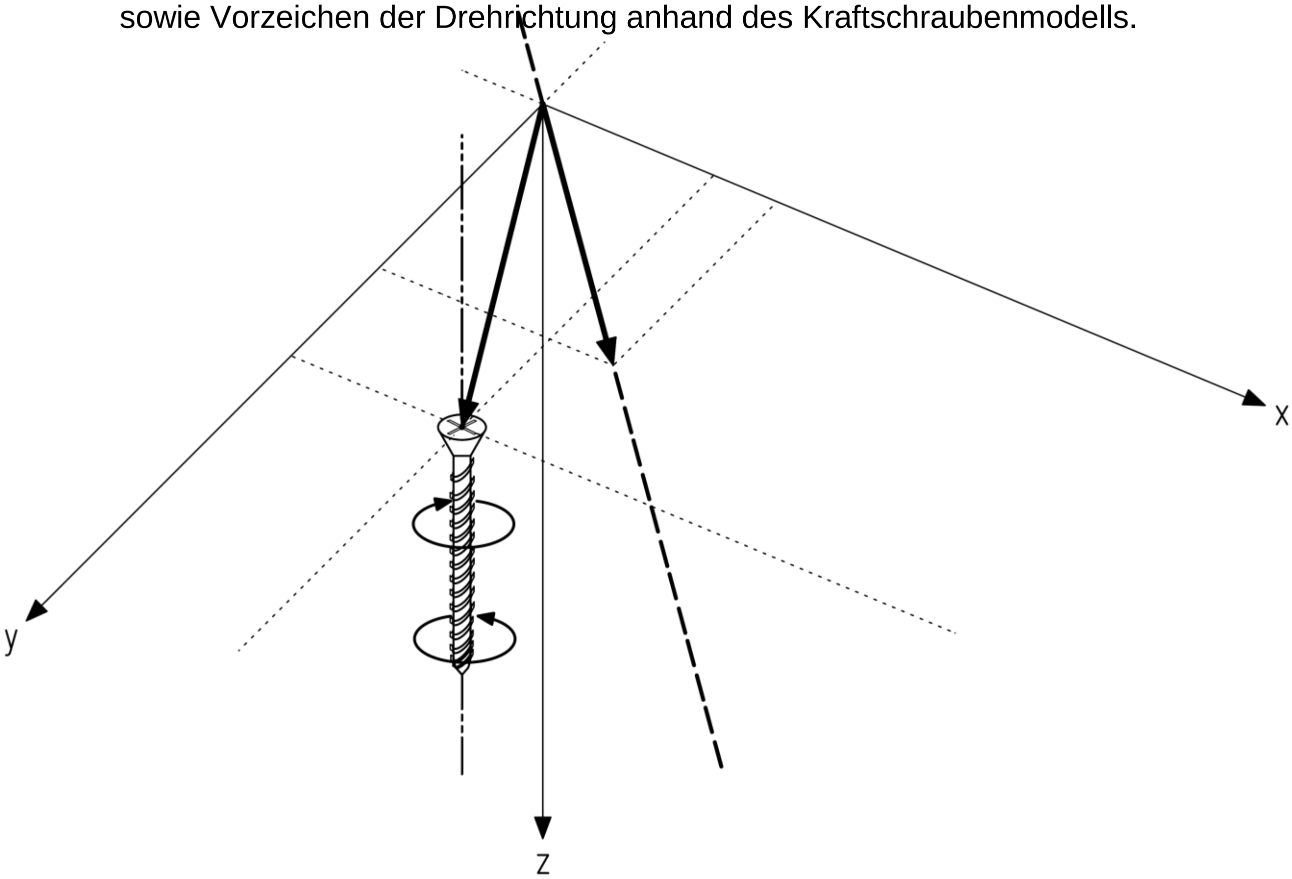
Die „zweite Kraft" verbirgt sich im Auflager! Sie geht oftmals gedanklich verloren, da sie im so genannten „Bezugspunkt" liegt. Oftmals wird, wie hier im Beispiel, von dem Moment gesprochen, welches mit der Kraft F und dem langen Hebel a im Auflagerpunkt bewirkt wird, ohne die zweite äquivalente Kraft im Auflager bzw. im Bezugspunkt selber zu beachten. Im Anwendungsfall ist oftmals nur die Rede von einer Kraft, deren Wirkungslinie zu einem Bezugspunkt einen bestimmten Abstand besitzt. Dieser Abstand heißt dann Hebel.



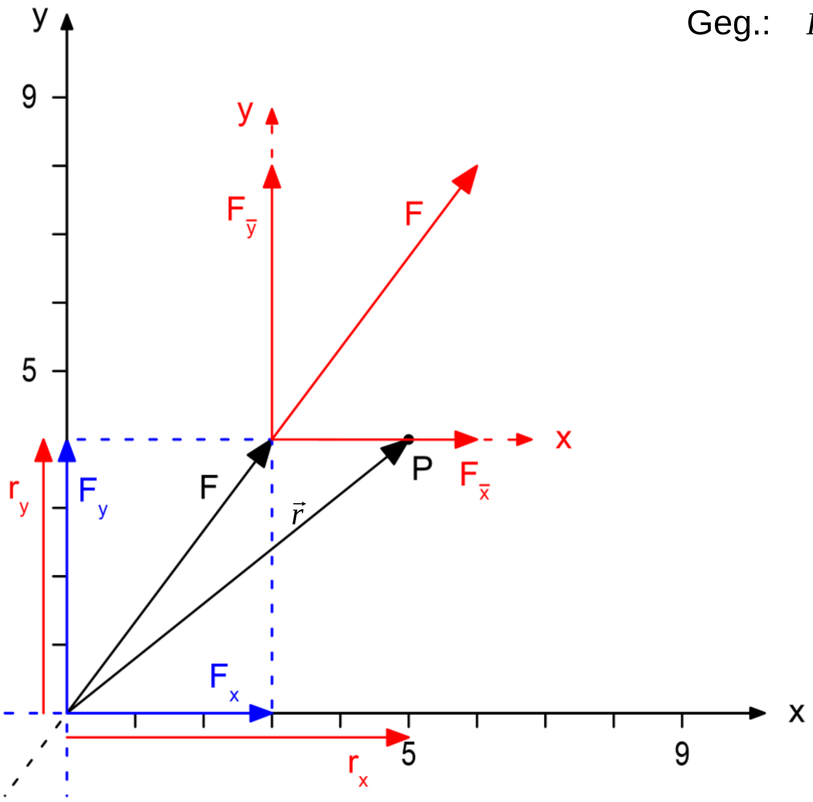
$$M = F \cdot r = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} F_y \cdot r_z - F_z \cdot r_y \\ F_z \cdot r_x - F_x \cdot r_z \\ F_x \cdot r_y - F_y \cdot r_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_z \end{pmatrix}$$

alternativ: $|M| = |F| \cdot |r| \sin\alpha$

Im Ingenieuralltag arbeitet man dagegen eher anschaulich, das heißt, Kraft, Hebel sowie Vorzeichen der Drehrichtung anhand des Kraftschraubenmodells.



Beispiel zur Belegung des Kraftschraubenmodells



Geg.: $\vec{F} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ WL durch $(0/0)$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

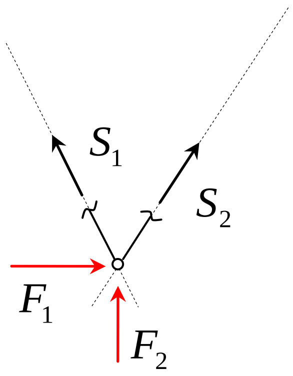
3.4 Die 3. Gleichgewichtsbedingung der Ebene

Mit der 3. Gleichgewichtsbedingung, nämlich der Forderung, dass die Summe aller auf eine ebene Scheibe wirkender Momente gleich Null sein muss, wird der 3. und letzte Freiheitsgrad in der Ebene "behindert". Dies ist die Rotation.

Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass diese 3. Gleichgewichtsbedingung eine weitere Gleichung darstellt, mit der sich eine weitere Unbekannte bestimmen lässt.

Wir erinnern uns an die ZKG und erweitern für die AKG:

ZKG
Gleichgewicht am freigeschnittenen Knoten

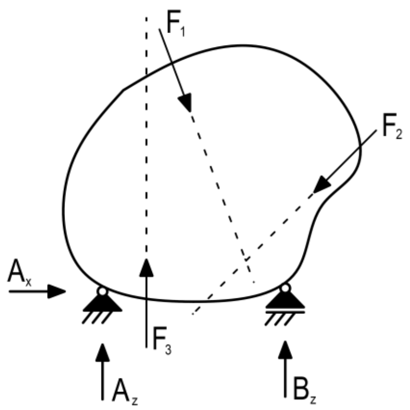


Der Knoten als mathematischer Punkt ohne Ausdehnung besitzt in der Ebene die zwei Freiheitsgrade der Translation. Er benötigt daher auch zwei Fesseln (zwei Stabkräfte). Es stellen sich somit zwei Unbekannte ein. Zur Bestimmung dieser Unbekannten stehen ebenfalls zwei GGB zur Verfügung.

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

AKG
Gleichgewicht am freigeschnittenen ebenen Körper



Der ebene Körper besitzt in der Ebene drei Freiheitsgrade, die beiden Translationen und die Rotation. Er benötigt daher auch drei Fesseln, z.B. in Form dreier Auflagerkräfte. Demzufolge stellen sich hier drei Unbekannte ein. Zur Bestimmung dieser Unbekannten stehen am Körper drei GGB zur Verfügung:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$\sum M_y = 0$$

Erläuterung des rechnerischen Vorgehens am Beispiel des Einfeldträgers aus 3.3:

Fazit:

1. Gleichgewichtsbedingung:

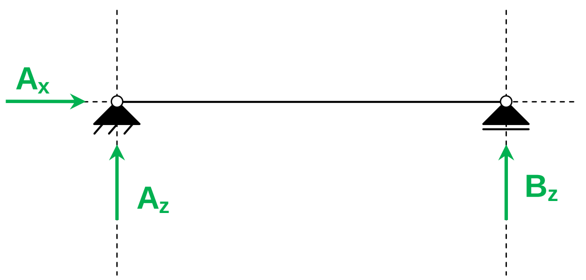
Die horizontale Auflagerreaktion A_x stellt die einzige Unbekannte in x-Richtung dar. Sie liegt zufällig auf derselben Wirkungslinie wie die horizontale äußere Last von 3 kN. Dies ist jedoch unerheblich hinsichtlich des Gleichgewichtes in x- Richtung, da bei der Summe aller Kräfte nicht die Rotation berücksichtigt wird, sondern lediglich alle Kräfte einer Richtung aufsummiert werden. Der ggf. parallele Abstand zwischen ihren Wirkungslinien ist dabei ohne Belang. Zudem sind alle Kräfte oder Kraftkomponenten in der dazu senkrechten Richtung „"entkoppelt" und fließen nicht in die Gleichgewichtsbedingung mit ein. Somit erhalten wir eine einzige Gleichung mit einer Unbekannten, nach der wir direkt auflösen können.

2. Gleichgewichtsbedingung:

Das Ergebnis "$A_Z = -B_Z$" ist erwartungsgemäß und nachvollziehbar richtig, jedoch von der Effizienz der Berechnung eher unbefriedigend, da in der Gleichung zwei Unbekannte enthalten sind, und wir somit lediglich ein Verhältnis beider Unbekannten erhalten und kein eindeutiges und direkten Zahlenwert.

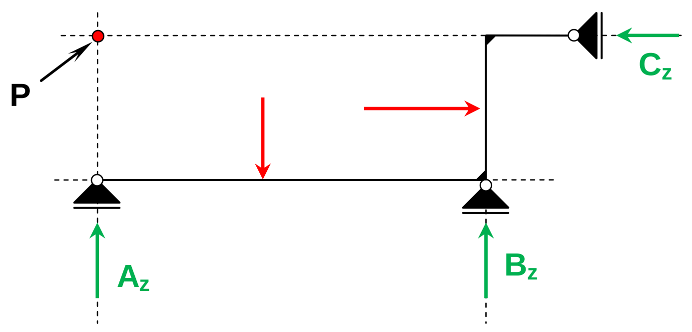
3. Gleichgewichtsbedingung:

Wenn die Kräftegleichgewichtsbedingungen ($\Sigma F_x=0$; ($\Sigma F_z=0$) mehrere Unbekannte enthalten ist es in der Regel deutlich effizienter (insbesondere in der Klausur), die 3. Gleichgewichtsbedingung vorzuziehen. Es lässt sich bei geschickter Wahl eines Bezugspunktes leichter eine Gleichung mit nur einer Unbekannten provozieren.



Hier im Beispiel standen 3 Unbekannte zur Bestimmung an. Wählt man z.B. das Auflager A zum Bezugspunkt, so besitzen die Wirkungslinien der Auflagerkräfte A_x und A_z keinen Abstand zum Punkt A, also keinen Hebel und bilden demnach kein Moment um Punkt A. Sie treten daher bei der Summe aller Momente um den Punkt A nicht in Erscheinung, was eine Gleichung mit nur einer Unbekannten, nämlich B_z erzeugt, nach der sofort ausgelöst werden kann.

Dieser Bezugspunkt kann auch außerhalb des Systems liegen, so dass in folgendem Beispiel die Summe der Momente um den Punkt P nur B_z als Unbekannte enthält.



Vorzeichen:

Zu Beginn der Berechnung legen wir die Orientierung, sprich die Vorzeichen, der Auflagerkräfte fest. Dies darf grundsätzlich beliebig erfolgen.

Für den Ingenieuralltag sinnvoller ist es, die vertikalen Auflagerkräfte entgegen der Gravitationsrichtung zu orientieren, also als "reactio" des tragenden Boden auf das Bauteil von unten nach oben gerichtet. Dies entspricht dem Standardfall, nämlich, dass ein Gebäude oder Bauwerk den gewachsenen Boden belastet.

Erhalten wir eine positives Vorzeichen für die Auflagerreaktion, dann zeigt dies (analog Kapitel 2, "unbekannte Stabkräfte am Knoten"), dass die Richtung richtig angenommen wurde. Darüber hinaus zeigt ein negatives Vorzeichen durchaus die kritische Wertigkeit einer anhebenden Kraft, da diese vom Boden nicht ohne weitere Maßnahmen aufgenommen werden kann.

Zwei vergleichende Beispiele…

3.5 Die Culmann-Gerade

Nach dem Motto:

"was rechnerisch geht, muss auch für die graphische Lösung gelten!"

In der Ebene stehen bei der Berechnung Allgemeiner Kräftegruppen 3 Gleichgewichts-bedingungen zur Verfügung, mit denen letztendlich an einem System 3 Unbekannte ermittelt werden können.

Mit Hilfe der sog. "Culmann-Verfahrens", oder auch kurz "Culmann-Gerade" genannt, ist es auch graphisch möglich, drei unbekannte Größen zu ermitteln:

Gegeben ist eine ebene Scheibe, die wie folgt ausreichend gelagert ist.