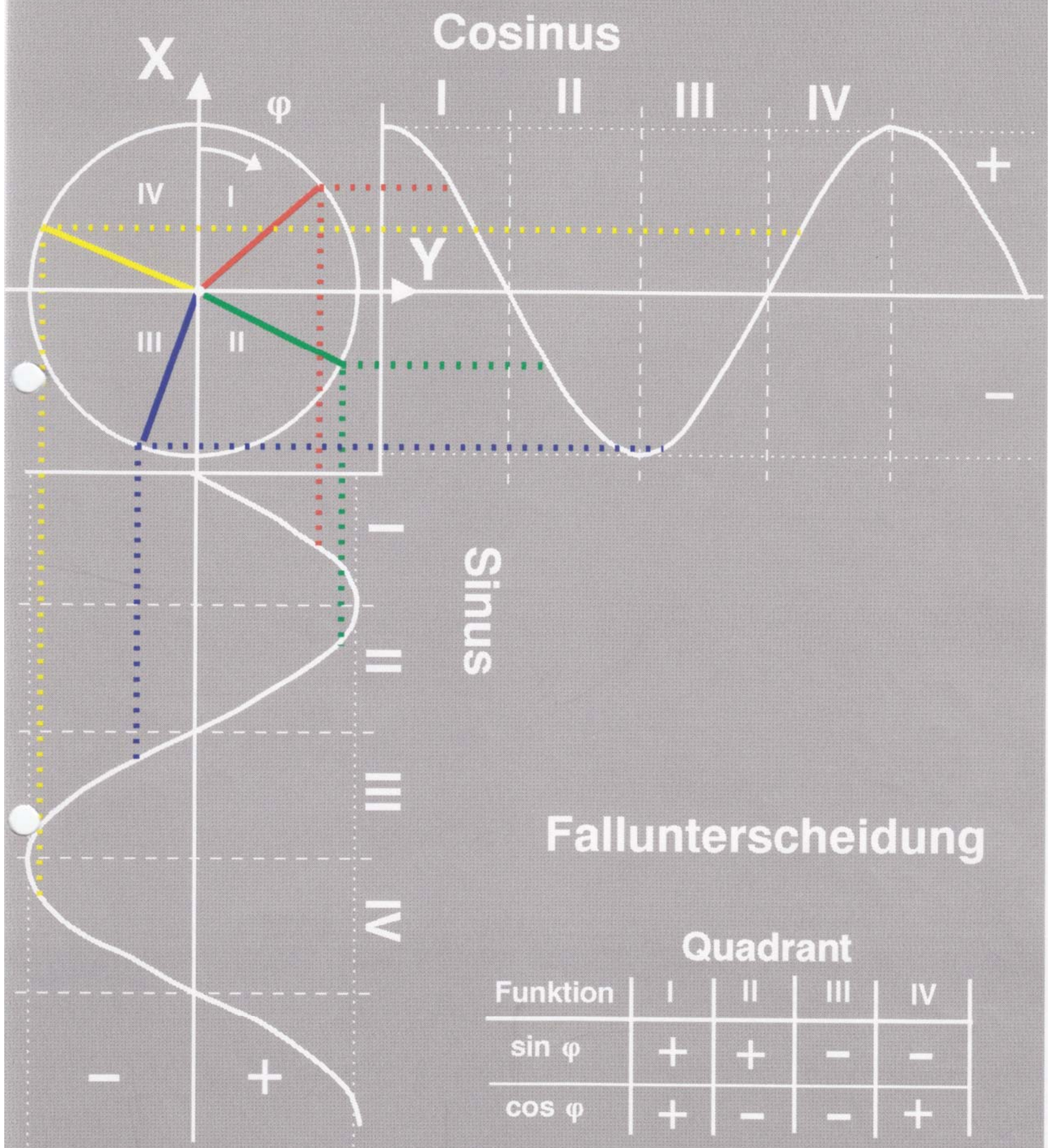
Mathematische Grundlagen für die Vermessungskunde

- Dreisatz
- Pythagoras
- Trigonometrische Funktionen im rechtwinkligen Dreieck
- Sinussatz
- Kosinussatz
- Höhe und Höhenfußpunkt

Sinus- und Cosinusfunktion

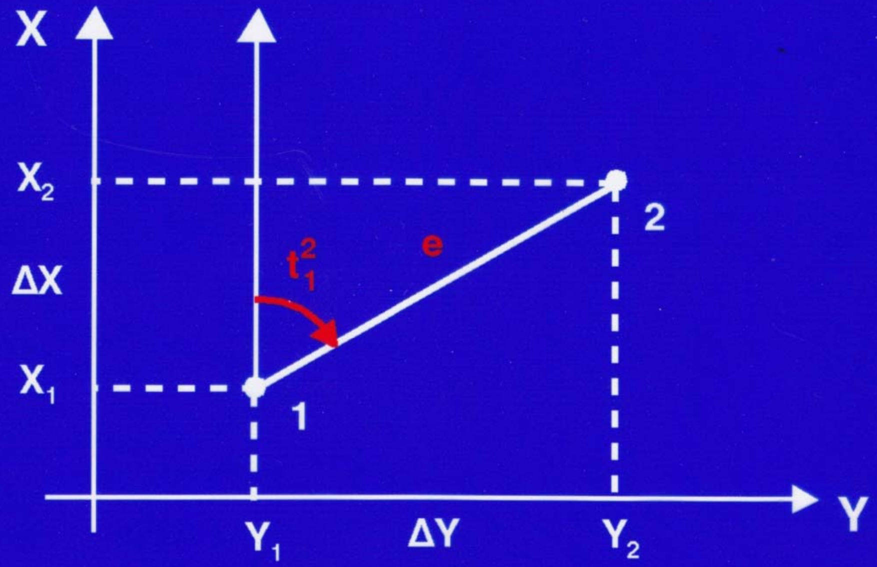


Fallunterscheidung

	Quadrant			
Funktion	I	II	III	IV
sin φ	+	+	−	−
cos φ	+	−	−	+

Umformungen zwischen rechtwinkligen und polaren Koordinaten

Umformung von rechtwinkligen Koordinaten in polare Koordinaten (R → P)



Gegeben: Rechtwinkelkoordinaten von 2 Punkten (Y_1, X_1) (Y_2, X_2)

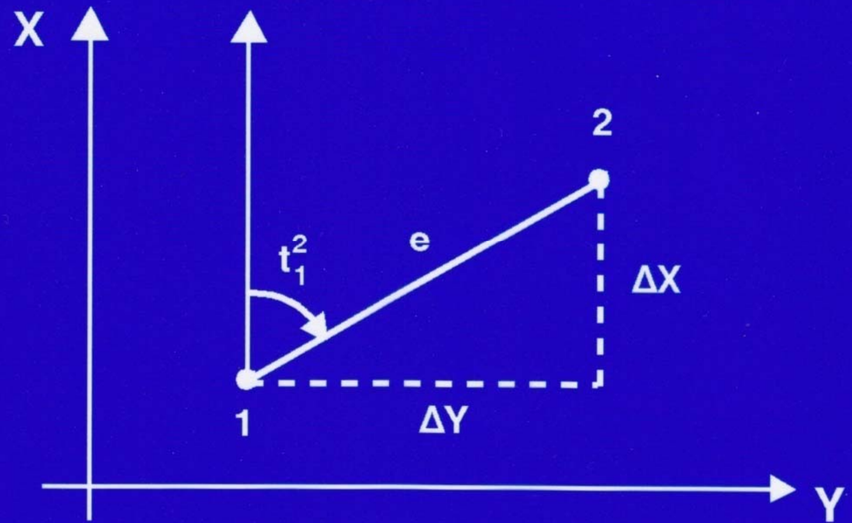
Gesucht : Polarelemente t, e

Lösung: $t = \arctan(\Delta Y / \Delta X)$ (Quadrantenregel)

$$e = \sqrt{(Y_2 - Y_1)^2 + (X_2 - X_1)^2}$$

Umformungen zwischen recht-winkligen und polaren Koordinaten

Umformung von polaren Koordinaten in rechtwinklige Koordinaten (P → R)



Gegeben: Polarkoordinaten (t,e)

Gesucht : Koordinatenunterschiede $\Delta Y\ (Y_2 - Y_1)$, $\Delta X\ (X_2 - X_1)$

Lösung:

$$\Delta Y = e \cdot \sin t_1^2$$
$$\Delta X = e \cdot \cos t_1^2$$

Erste Grundaufgabe:

$$Y_2 = Y_1 + \Delta Y \quad = Y_1 + e \cdot \sin t_1^2$$
$$X_2 = X_1 + \Delta X \quad = X_2 + e \cdot \cos t_1^2$$

Handhabung der Umrechnungstasten P → R und R → P für verschiedene Taschenrechner

t = Richtungswinkel	e = Horizontalentfernung	$\Delta y = Y_E - Y_A$	$\Delta x = X_E - X_A$
(t = 159,033gon	e = 50,00m	$\Delta y = +30{,}00m$	$\Delta x = -40{,}00m$)

Achtung: Bei allen Rechnern immer auf den richtigen Winkelmodus umschalten !
z.B. für gon auf „GRAD“

für Casio-Rechner:

P → R	„e“	SHIFT	P → R	„t“	=	⇨	Δx
				SHIFT	x → y	⇨	Δy
R → P	„Δx“	SHIFT	R → P	„Δy“	=	⇨	e
				SHIFT	x → y	⇨	t

für HP-Rechner *mit* UPN:

P → R	„t“	ENTER	„e“	(blau)	y,x	⇨	Δx
					x ↔ y	⇨	Δy
R → P	„Δy“	ENTER	„Δx“	(gelb)	θ,r	⇨	e
					x ↔ y	⇨	t

<u>für SHARP-Rechner:</u>

P → R	„e“	↕	„t“	SHIFT → xy	⇨	Δx
				↕	⇨	Δy
R → P	„Δx“	↕	„Δy“	SHIFT → rθ	⇨	e
				↕	⇨	t

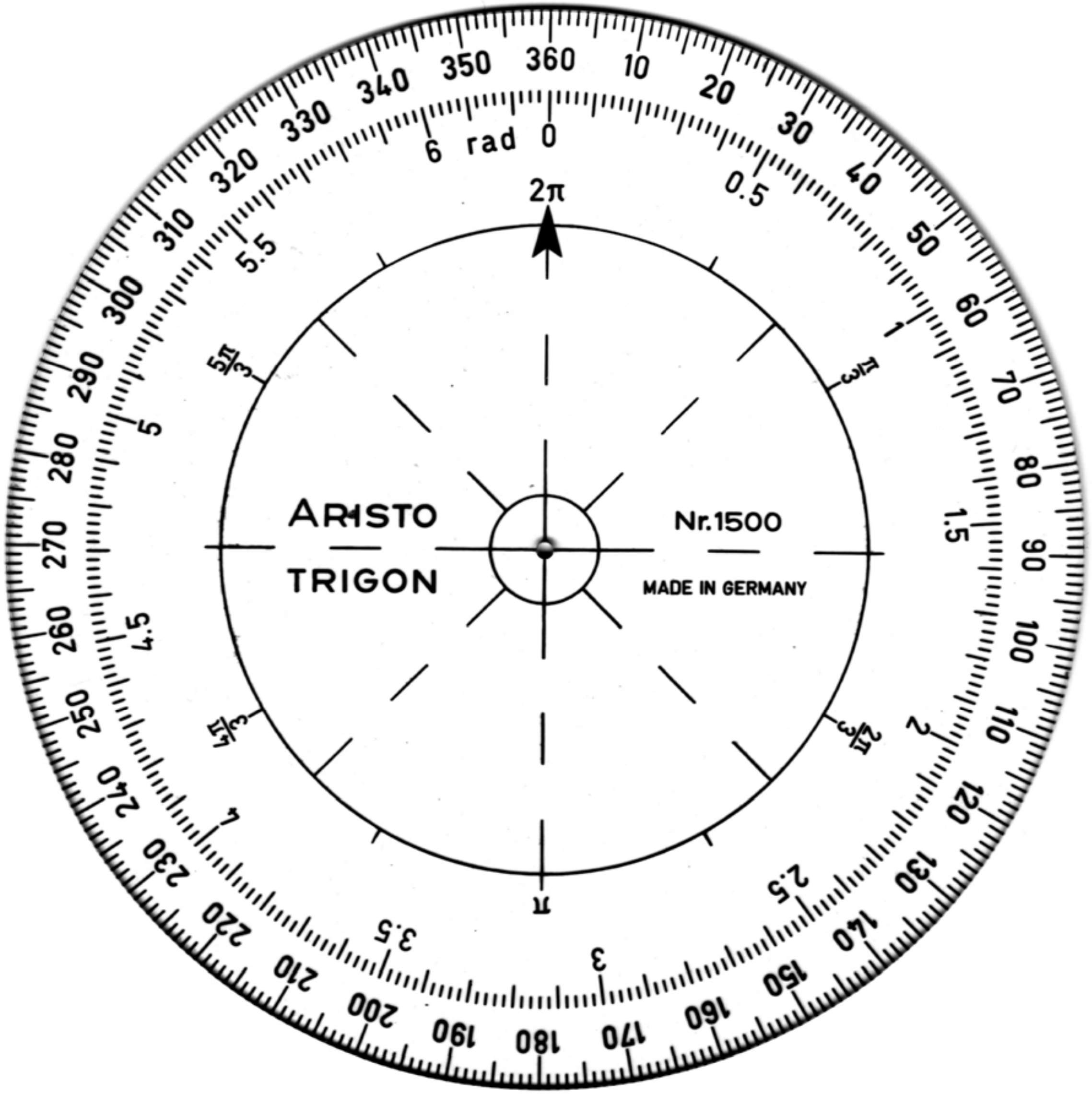
<u>für TEXAS-Rechner:</u>

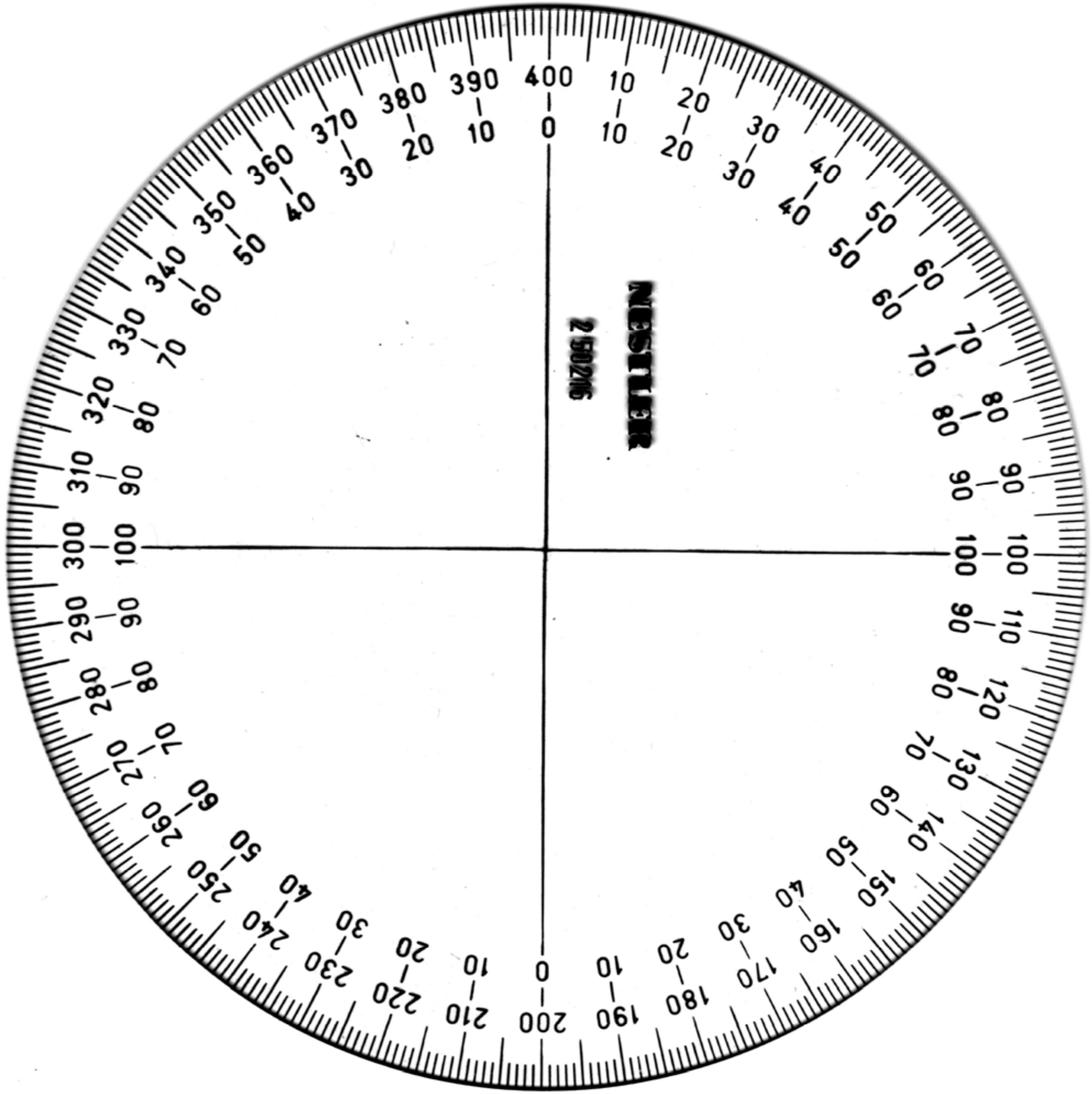
P → R	„e“	x ↔ y	„t“	P → R	⇨	Δx
				x ↔ y	⇨	Δy
R → P	„Δx“	x ↔ y	„Δy“	R → P	⇨	e
				x ↔ y	⇨	t

<u>für HP-Rechner *ohne* UPN:</u>

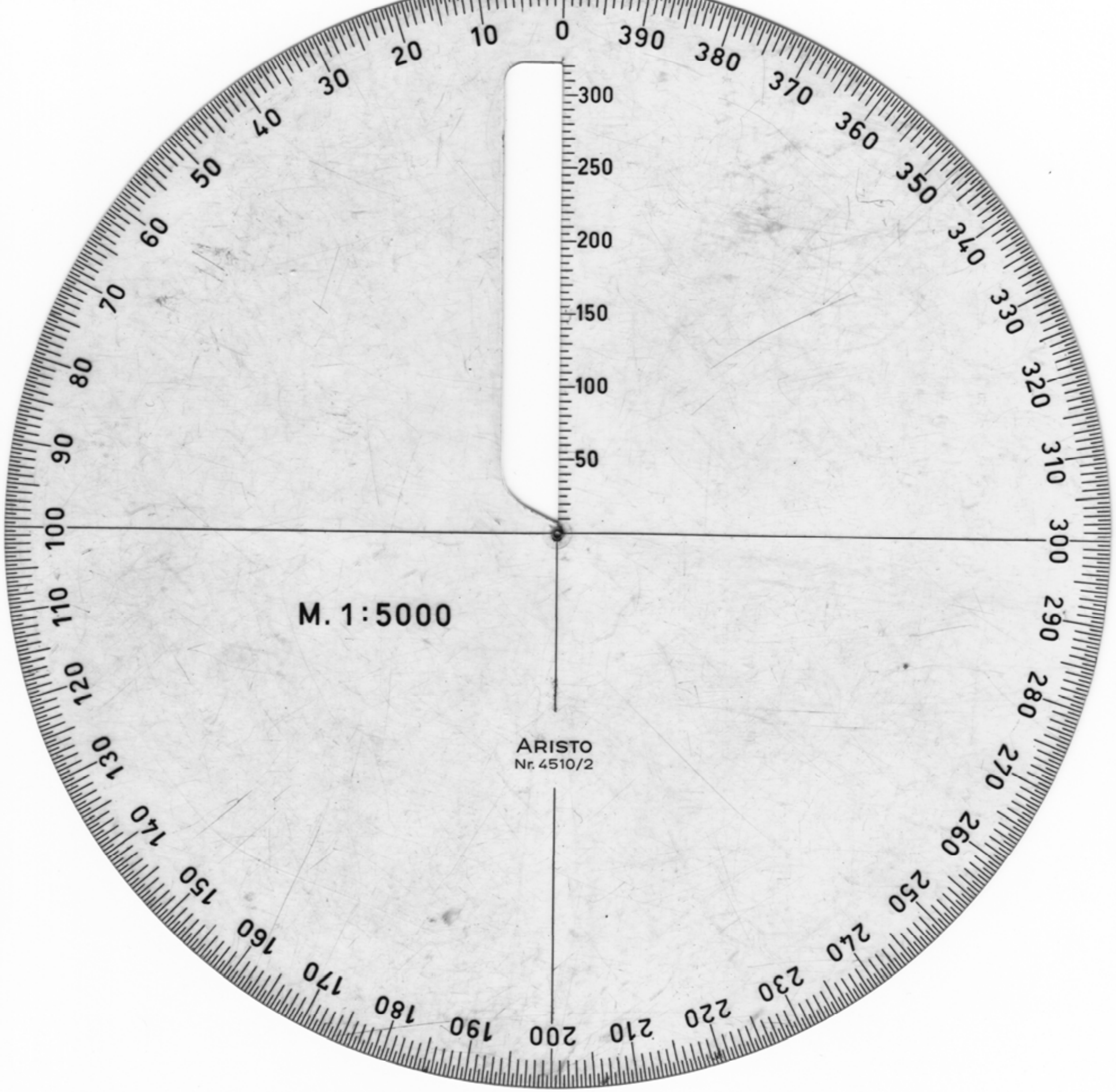
P → R	„e“	INPUT	„t“	(gelb) → R	⇨	Δy
				(blau) SWAP	⇨	Δx.
R → P	„Δx“	INPUT	„Δy“	(blau) → P	⇨	t
				(blau) SWAP	⇨	e

Rad	Rad	Bogenmaß	2π
°	Deg	Altgrad	360°
Gon	Gra	Neugrad	400 gon


ARISTO
TRIGON
Nr.1500
MADE IN GERMANY
360 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160 170 180 190 200 210 220 230 240 250 260 270 280 290 300 310 320 330 340 350
6 rad 0
0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5 5.5
2π
π/3
2π/3
π
4π/3
5π/3



NESTLER
250216


0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
150
160
170
180
190
200
210
220
230
240
250
260
270
280
290
300
310
320
330
340
350
360
370
380
390
300
250
200
150
100
50
M. 1:5000
ARISTO
Nr. 4510/2

CASIO Taschenrechner fx-85**

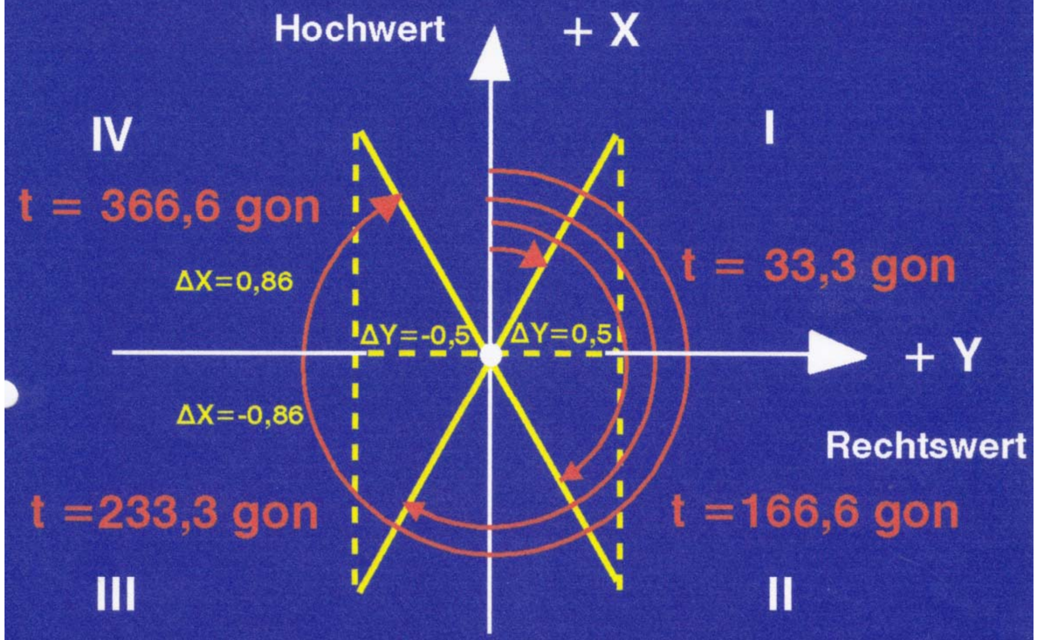
R $\longrightarrow$ P Pol (ΔX , ΔY)

r = RCL X
Φ = RCL Y

P $\longrightarrow$ R Rec (r , Φ)

ΔX = RCL X
ΔY = RCL Y

Richtungswinkel t



Beispiel:

ΔY	+0,500	+0,500	-0,500	- 0,500
ΔX	+0,866	- 0,866	-0,866	+0,866

Lösung: arctan-Taste

arctan	+33,3	-33,3	+33,3	-33,3
		+200	+200	+400
	33,3	166,6	233,3	366,6 gon

Lösung: Rechtwinkel-Polar-Taste (R→P)

R→P	33,3	166,6	-166,6	-33,3
			+400	+400
			233,3	366,6 gon

3.3.1 Berechnung von Höhe und Höhenfußpunkt in einem Dreieck

Sind in einem Dreieck die Längen der Dreiecksseiten a, b und c bekannt, lässt sich der rechtwinklige Abstand d. h. die *Ordinate* oder *Höhe* h eines Eckpunktes (Punkt C in Abb. 3.3-1) bezüglich der gegenüberliegenden Dreiecksseite als Grundseite (Seite c) mit den Fußpunktabschnitten p und q berechnen.

Formelableitung:

$$\begin{array}{rcl} h^2 & = & a^2 - p^2 \\ h^2 & = & b^2 - q^2 \\ \hline p^2 - q^2 & = & a^2 - b^2 \end{array}$$

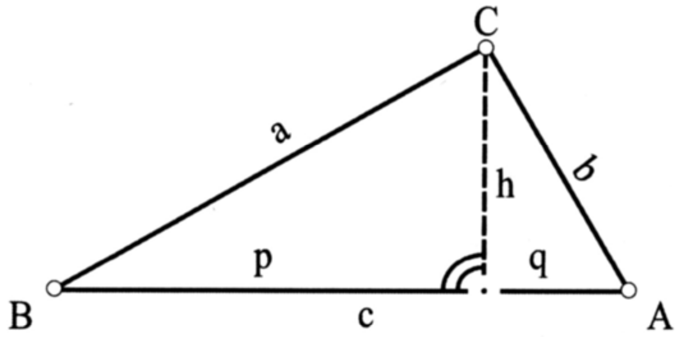


Abbildung 3.3-1: Höhe und Höhenfußpunkt in einem Dreieck

Die weitere Formelableitung kann auf zwei Wegen erfolgen:

$q = c - p\,, \qquad q^2 = c^2 - 2cp + p^2$ $p^2 - (c^2 - 2cp + p^2) = a^2 - b^2$ $p = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} \quad (3.11)$ $q = c - p \quad (3.12)$ $h = \sqrt{a^2 - p^2} \quad (3.13)$	$p = c - q\,, \qquad p^2 = c^2 - 2cq + q^2$ $(c^2 - 2cq + q^2) - q^2 = a^2 - b^2$ $q = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c} \quad (3.14)$ $p = c - q \quad (3.15)$ $h = \sqrt{b^2 - q^2} \quad (3.16)$

Zur Berechnung werden entweder die Gl. (3.11) bis (3.13) oder die Gl. (3.14) bis (3.16) benutzt.

Messwerte:

$a = 31{,}15$ m; $b = 27{,}48$ m; $c = 35{,}76$ m

Berechnung:

$$p = \frac{35,76^2 + 31,15^2 - 27,48^2}{2 \cdot 35,76} = 20,89 \text{ m}$$

$$q = 35,76 - 20,89 = 14,87 \text{ m}$$

$$h = \sqrt{31,15^2 - 20,89^2} = 23,11 \text{ m}$$

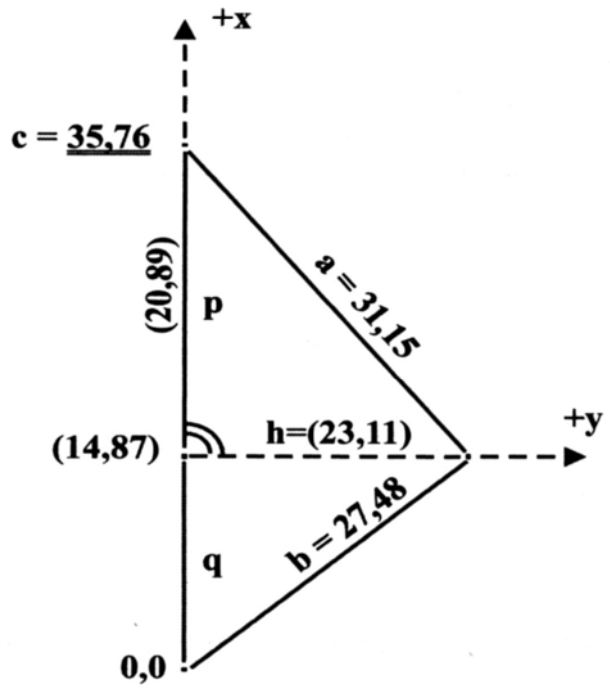


Abbildung 3.3-2: Höhe und Höhenfußpunkt