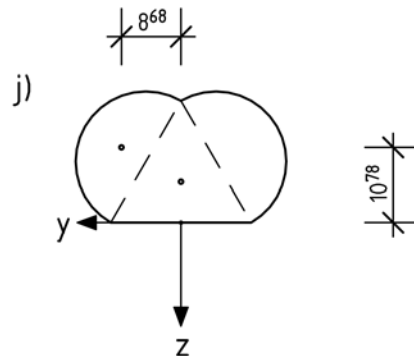


## 1) Angaben in cm ab Koordinatenursprung der Aufgabenstellung:

- a)  $y_s = 0,0$  ;  $z_s = 27,8$       b)  $y_s = 0,0$  ;  $z_s = 17,8$       c)  $y_s = 12,7$  ;  $z_s = 12,7$   
 d)  $y_s = 0,0$  ;  $z_s = - 5,1$       e)  $y_s = - 22,35$  ;  $z_s = 35,56$  f)  $y_s = - 6,45$  ;  $z_s = 23,95$   
 g)  $y_s = - 27,25$ ;  $z_s = 22,25$  h)  $y_s = - 40$  ;  $z_s = 9,73$       i) vgl. Bautabellen  
 j)  $y_s = 0,0$  ;  $z_s = - 9,0$

Hinweis für Aufgabe j:  
Teilschwerpunkt →



## 2) siehe Mitschrift / Übungsblatt

- 3) a)  $N_1 = N_2 = 16,7 \text{ kN}$  ;  $w_z = 1,14 \text{ mm}$   
 b)  $N_1 = N_3 = 3,26 \text{ kN}$  ;  $N_2 = 4,35 \text{ kN}$  ;  $w_z = 0,33 \text{ mm}$   
 c)  $N_1 = N_3 = 4,69 \text{ kN}$  ;  $N_2 = 8,12 \text{ kN}$  ;  $w_z = 0,47 \text{ mm}$

4)  $N_S = N_F = - 5,98 \text{ kN}$  ;  $u_{x,D} = 1,49 \text{ mm}$

5)  $N_S = - 8 \text{ kN}$  ;  $N_F = 2 \text{ kN}$  ;  $\Delta l_S = 1,196 \text{ mm}$  ;  $\Delta l_F = 0,2 \text{ mm}$

Schiefstellung:  $2,792 \cdot 10^{-4} = 0,279 \text{ ‰}$

6)  $N_1 = N_2 = - 286,28 \text{ kN}$  ;  $u_{x,B} = 0,217 \text{ mm}$  ;

(Zwischenergebnis: liegender und unbehinderter Stab  $\Delta l = 3,5 \text{ mm}$ )

$\sigma_1 = 36,45 \text{ MN/m}^2$ ,  $\sigma_2 = 74,39 \text{ MN/m}^2$

7)  $L = 3.057,32 \text{ m}$ ;  $\Delta l = 1.747,05 \text{ mm}$

8)  $N_{Ku} = - 186,5 \text{ kN}$ ;  $N_{Al} = - 113,5 \text{ kN}$ ;  $\Delta l = - 0,229 \text{ mm}$ ;

$\sigma_{Ku} = - 263,8 \text{ MN/m}^2$ ;  $\sigma_{Al} = - 160,57 \text{ MN/m}^2$

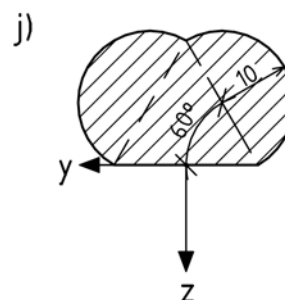
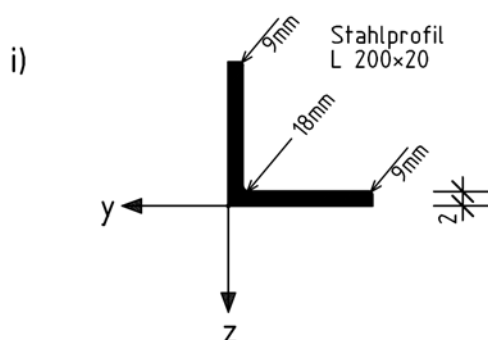
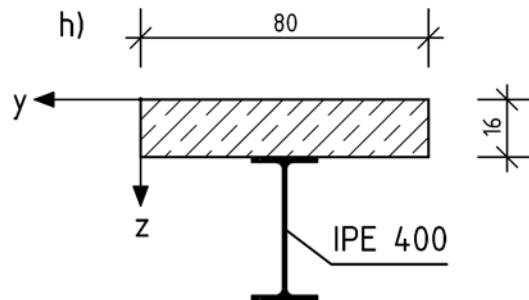
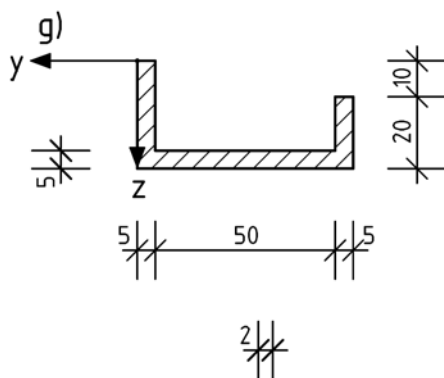
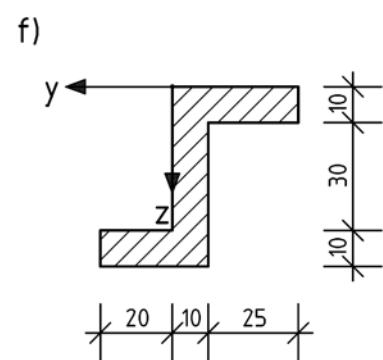
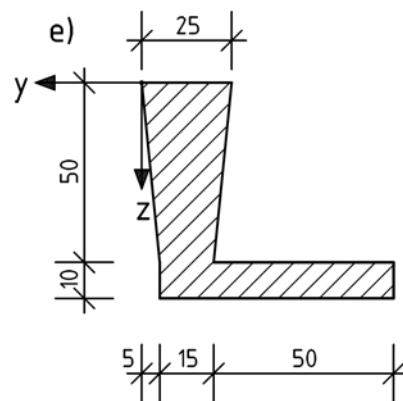
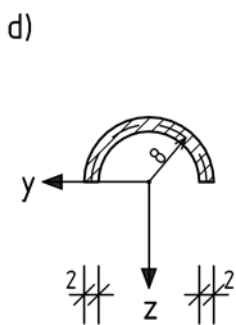
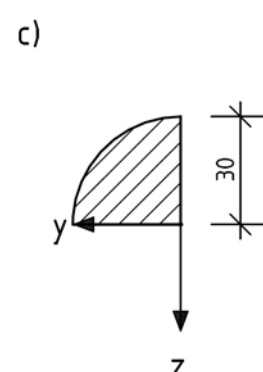
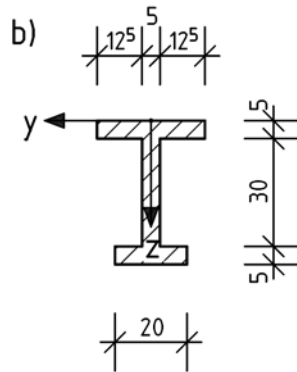
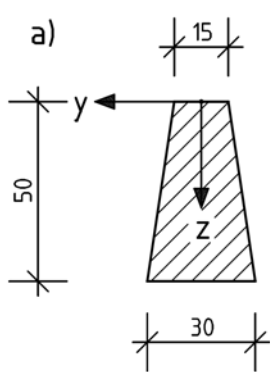
9)  $N_1 = 33,54 \text{ kN}$ ;  $N_2 = - 42,43 \text{ kN}$ ;  $\Delta l_1 = 0,357 \text{ mm}$ ;  $\Delta l_2 = - 0,286 \text{ mm}$

## 10) Wegen Rundungsungenauigkeiten Angabe gerundeter Ergebnisse:

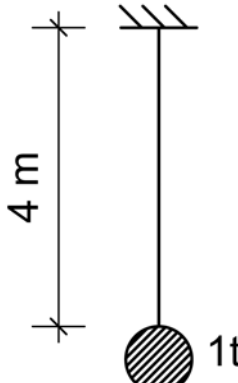
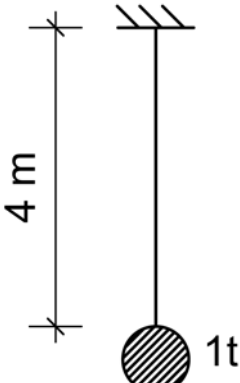
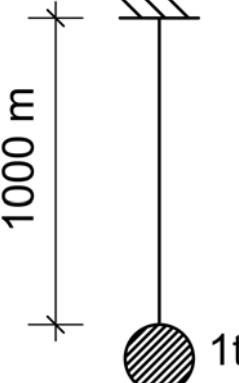
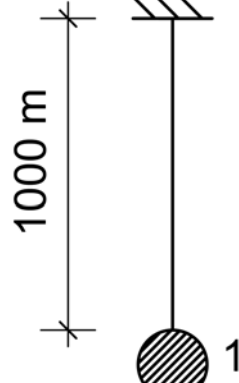
Vor der Erwärmung:  $N_{Mast} = - 227,7 \text{ kN}$ ;  $N_{Seil} = 60 \text{ kN}$

Nach der Erwärmung:  $N_{Mast} \cong - 595 \text{ kN}$ ;  $N_{Seil} \cong 157 \text{ kN}$

- 1) Von den nachfolgend gezeichneten Querschnitten sind die Fläche und die Lage des Schwerpunktes bezogen auf das geg. Koordinatensystem zu berechnen. Alle Längenangaben in cm.



Rechenbeispiel 2

<p>a)</p> <p>Stabmodell Ø 10 mm S 235</p>  <p>4 m</p> <p>1t</p> <p><math>E=210.000 \frac{MN}{m^2}</math></p>	<p>b)</p>  <p>4 m</p> <p>1t</p> <p><math>\Delta T = -30^\circ K</math> gegenüber Fall a)</p>	<p>c)</p>  <p>1000 m</p> <p>1t</p> <p><math>\Delta T = 0^\circ K</math></p>	<p>d)</p>  <p>1000 m</p> <p>1t</p> <p><math>T_0 = +20^\circ C</math> <math>T_i = +25^\circ C</math></p>
<p>Eigengewicht nur an der Masse</p>	<p>auch das Eigengewicht des Stabes wird berücksichtigt</p>	<p>analog b) , jedoch <math>l_0 = 1000m</math></p>	

## Zum Rechenbeispiel 2

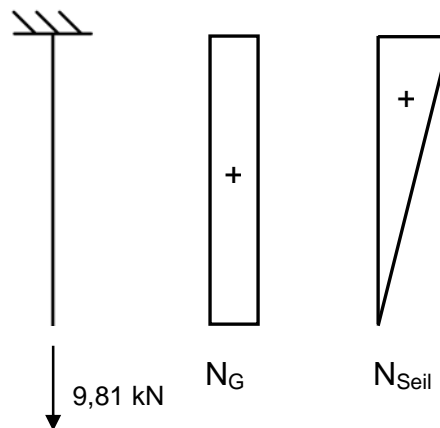
In der Praxis müssen die beiden Nachweise „Standsicherheits- und Gebrauchstauglichkeitsnachweis“ erbracht werden.

Fall b)

$$N_{\max} = V \cdot \gamma = A \cdot l \cdot \gamma$$

$$\gamma_{\text{Stahl}} = 78,5 \text{ kN/m}^3$$

$$\Rightarrow \text{Dichte}_{\text{Stahl}} = 7.850 \text{ kg/m}^3$$



### Standsicherheitsnachweis:

Da die Seilmasse im Verhältnis zur Kugelmasse sehr gering ist, kann sie im Ingenieuralltag vernachlässigt werden. Dies soll nachfolgend veranschaulicht werden.

$$G_{\text{Kugel}} = 1000 \cdot 9,81 = 9,81 \text{ KN}$$

$$G_{\text{Seil}} = A \cdot l \cdot \gamma = 78,54 \cdot 10^{-6} \cdot 4,0 \cdot 78,5 = 0,02466 \text{ KN}$$

Verhältnis: 
$$\frac{\text{Masse}_{\text{Seil}}}{\text{Masse}_{\text{Kugel}}} = \frac{0,02466}{9,81} = 0,25\%$$

Bei diesem einfachen System geht die Gesamtlast linear in alle Berechnungsschritte ein, sodass wir den Ausnutzungsgrad direkt erhöhen können. Auch die Teilsicherheitsbeiwerte bleiben unverändert erhalten.

$$\eta = 0,86 + 0,0025 = 0,8625 \leq 1,0$$

### Gebrauchstauglichkeitsnachweis:

Hierbei überprüft der Ingenieur die Verformung eines Bauteils. In diesem Fall erfährt das System eine Längenänderung infolge Seileigengewicht und Temperatur.

Allgemein gilt: 
$$\Delta l = \frac{N \cdot l_0}{E \cdot A} + \alpha_T \cdot \Delta T \cdot l_0$$

Die Normalkraft im Seil verläuft nicht konstant, sondern linear über die Länge (Höhe).

Es gilt: 
$$N_{(x)} = \frac{N_{\max}}{l} \cdot x \quad \text{mit } N_{\max} = A \cdot l \cdot \gamma \quad \rightarrow N_{(x)} = \frac{A \cdot l \cdot \gamma}{l} \cdot x = A \cdot \gamma \cdot x$$

$$\begin{aligned}\Delta l_{\text{Seil}} &= \int_0^{l_0} \frac{N(x)}{E \cdot A} dx + \alpha_T \cdot \Delta T \cdot l_0 = \int_0^{l_0} \frac{A \cdot \gamma \cdot x}{E \cdot A} dx + \alpha_T \cdot \Delta T \cdot l_0 \\ &= \frac{78,5 \cdot 10^{-3} \text{ MN/m}^3 \cdot 4,0^2 \text{ m}^2}{2 \cdot 210.000 \text{ MN/m}^2} + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot (-30) \cdot 4,0 = 2,991 \cdot 10^{-6} \text{ m} + (-1,44 \cdot 10^{-3}) \text{ m}\end{aligned}$$

Gesamtverformung:

$$\begin{aligned}\Delta l_{\text{Gesamt}} &= \Delta l_{\text{Masse}} + \Delta l_{\text{Seil}} + \Delta l_{\text{Temperatur}} \\ &= 2,379 \text{ mm} + 0,002991 \text{ mm} - 1,44 \text{ mm} = 0,941991 \text{ mm}\end{aligned}$$

Fall c)

Stand sicherheitsnachweis:

Die Situation ist nahezu identisch, jedoch beträgt die Seillänge 1000m. Da sich somit das Seileigengewicht stark erhöht, darf das Seileigengewicht nicht vernachlässigt werden!

$$N_{\text{max}} = 9,81 + A \cdot l \cdot \gamma$$

$$\begin{aligned}\rightarrow \sigma_k &= \frac{N}{A} + \frac{A \cdot l \cdot \gamma}{A} = \frac{9,81 \cdot 10^{-3}}{A} + 78,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 \\ &= 124,9 + 78,5 = 203 \text{ MN/m}^2\end{aligned}$$

mit Teilsicherheitsbeiwerten:

$$\rightarrow \sigma_d = 124,9 \cdot 1,5 + 78,5 \cdot 1,35 = 293,3 \text{ MN/m}^2 > 218,2 \text{ MN/m}^2$$

$$\eta = 1,34 > 1,0$$

Das wirft die Frage auf, wie lang ein Seil überhaupt sein darf, damit es nicht bereits unter seinem Gewicht versagt....?

$$\begin{aligned}\sigma_d &= 1,35 \cdot \frac{A \cdot \gamma \cdot l_0}{A} = 1,35 \cdot \gamma \cdot l_0 \leq \frac{f_{y,d}}{1,1} = 218,2 \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \text{ (also unabhängig vom Querschnitt!)} \\ \rightarrow l_0 &\leq \frac{218,2}{78,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1,35} = 2.059 \text{ m}\end{aligned}$$

Bei der Länge von 1000m besitzt das Seil also noch Tragreserven hinsichtlich seines Eigengewichtes. Bei größerem Durchmesser bleibt die Spannung infolge des Seileigengewichtes konstant, da mit vergrößertem Querschnitt A das Volumen in gleicher Weise zunimmt wie die Querschnittsfläche selber. Hinsichtlich der angehängten Masse führt eine Querschnittsvergrößerung zu geringeren Spannungen:

Zur Veranschaulichung werden zwei Beispiele mit unterschiedlichen Durchmessern gegenübergestellt.

gewählt: Seil Ø 12 mm  $A = 113,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$

$$\begin{aligned}\sigma_d &= \frac{9,81 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5}{113,1 \cdot 10^{-6}} + 78,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 \cdot 1,35 \\ &= 130,1 + 106 = 236,1 \text{ MN/m}^2 > 218,1 \text{ MN/m}^2\end{aligned}$$

$$\eta = 1,08 > 1,0$$

gewählt: Seil Ø 14 mm  $A = 153,9 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$

$$\begin{aligned}\sigma_d &= \frac{9,81 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5}{153,9 \cdot 10^{-6}} + 78,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 \cdot 1,35 \\ &= 95,6 + 106 = 201,6 \text{ MN/m}^2 < 218,1 \text{ MN/m}^2\end{aligned}$$

$$\eta = 0,924 < 1,0 \rightarrow \text{Nachweis erbracht!}$$

### Gebrauchstauglichkeitsnachweis:

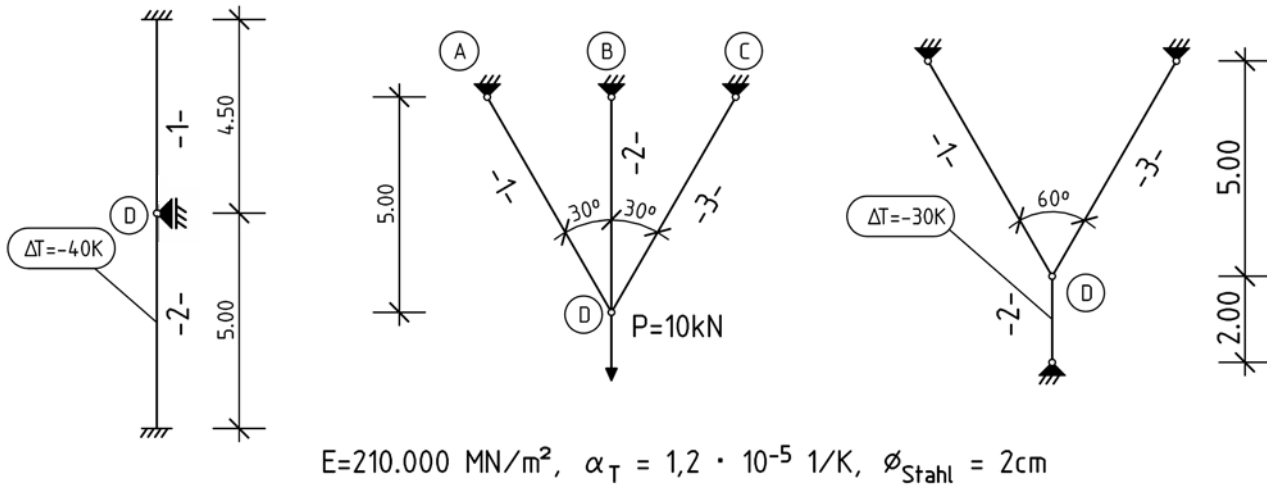
Hinsichtlich ihres Gebrauchstauglichkeitsnachweises werden Fall c) und Fall d) gemeinsam behandelt, da sich positive Dehnung infolge Normalkraft und positive Dehnung infolge Temperaturerhöhung überlagern. Fall d) beinhaltet Fall c).

$$\Delta l = \frac{N_{\text{Masse}} \cdot l}{E \cdot A} + \frac{1}{EA} \int_0^{l_s} N_{S(x)} dx + \alpha_T \int_0^{l_s} \Delta T_{(x)} dx \quad \text{mit} \quad \Delta T_{(x)} = \frac{(25-20)}{l_0} x$$

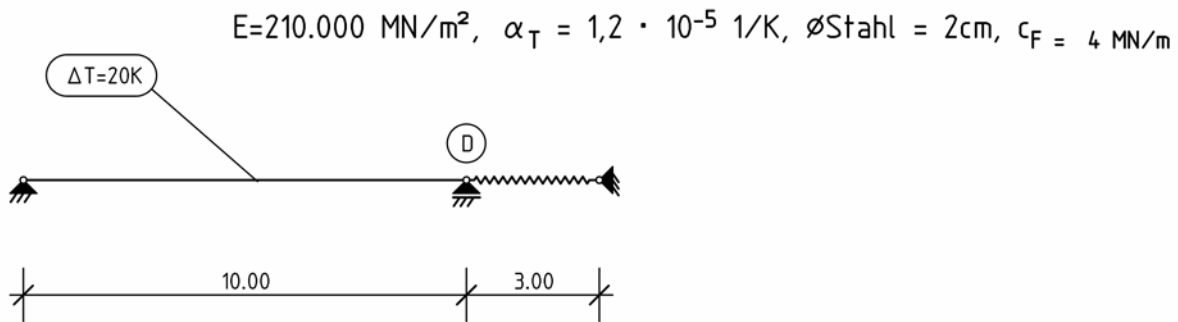
$$\begin{aligned}\Delta l &= \frac{9,81 \cdot 10^{-3} \cdot 1000}{210.000 \cdot 0,007^2 \cdot \pi} + \frac{1}{E} \cdot 10^{-3} \cdot \gamma \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{1000} + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{5}{1000} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{1000} \\ &= 0,3035m + 0,186m + 0,03m = 0,5195m\end{aligned}$$

Fazit: Es wird deutlich, dass bei beachtlichen Seillängen dessen Eigengewicht, wie auch die Verformung infolge desselben sehr wohl berücksichtigt werden müssen!

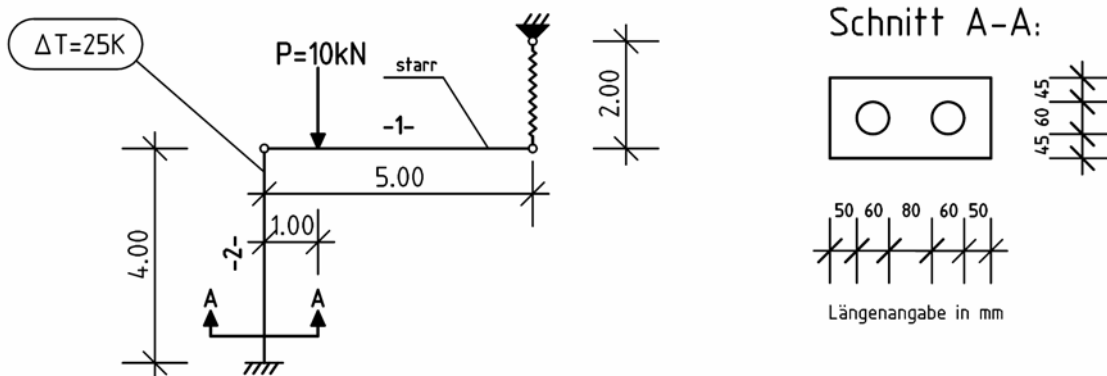
- 3) Bestimmen Sie für die drei folgenden Systeme die Stabkräfte und die Verschiebung des Punktes D!



- 4) Bestimmen Sie für das folgende System die Verschiebung des Punktes D!

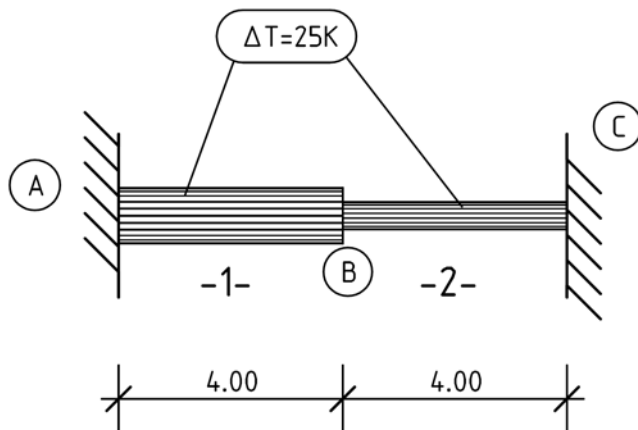


- 5) Bestimmen sie für das folgende System die Schiefstellung des starren Stabes !



$E=210.000 \text{ MN/m}^2, \alpha_T = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}, c_F = 10 \text{ MN/m}$

- 6) Für das folgende System sind die Normalkräfte zu ermitteln. Es sind des Weiteren die Spannungen in den Querschnitten sowie die Verschiebung  $u_x$  von Punkt B zu berechnen.



$$E_1 = 70.000 \text{ N/mm}^2$$

$$E_2 = 210.000 \text{ N/mm}^2$$

$$\phi_1 = 100 \text{ mm,}$$

$$\phi_2 = 70 \text{ mm,}$$

$$\alpha_{T1} = 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K,}$$

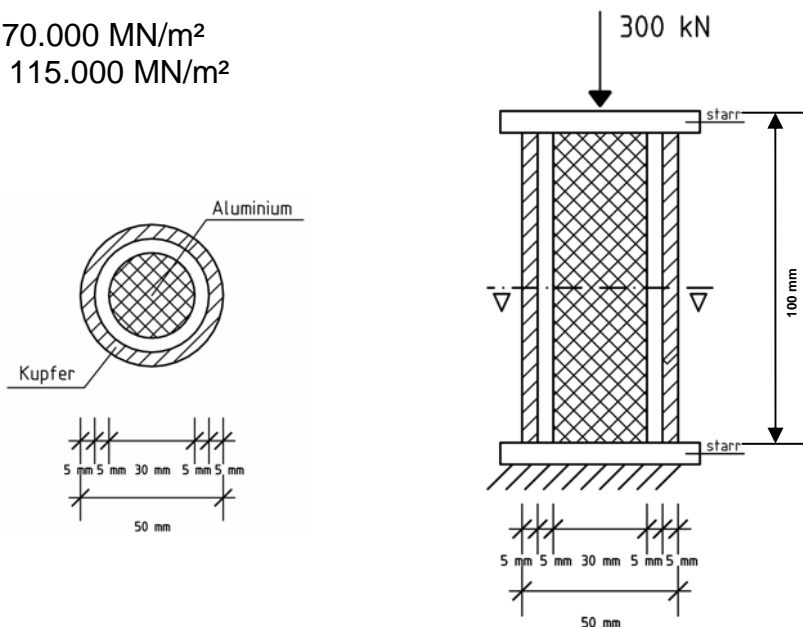
$$\alpha_{T2} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K,}$$

- 7) Wie lang darf ein pendelnd aufgehängter Stab aus Stahl mit einem Durchmesser von 12 mm sein, wenn die Spannung von 240 N/mm<sup>2</sup> (Streckgrenze) nicht überschritten werden soll. Welche Längenänderung erfährt der hängende Stab gegenüber dem liegenden Stab.  
 $\gamma = 78,5 \text{ kN/m}^3$ ,  $E = 210.000 \text{ MN/m}^2$

- 8) Ein Kreisringquerschnitt aus Kupfer und ein Kreisquerschnitt aus Aluminium werden über eine quasi starre Platte wie dargestellt belastet. Berechnen Sie die Spannungen in den Materialien, die anteiligen Kräfte und die Längenänderung!

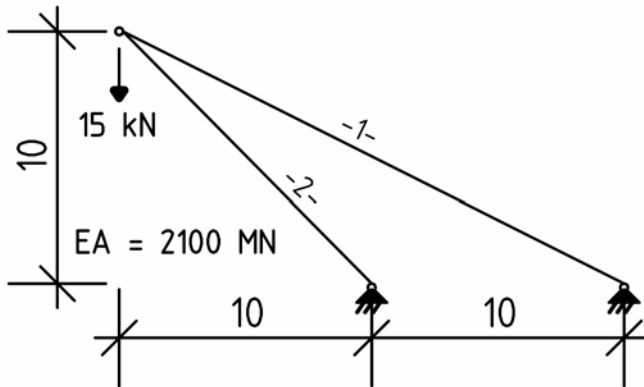
$$E_{Al} = 70.000 \text{ MN/m}^2$$

$$E_{Ku} = 115.000 \text{ MN/m}^2$$





9) Berechnen Sie die Längenänderung der beiden Stäbe.



10) Ein Funkmast ist zu seiner Stabilisierung mit vier Seilen abgespannt. Die Vorspannkraft in den Seilen beträgt 60 kN. Gegenüber seiner Aufstelltemperatur erwärmt sich nur der Mast unter Sonneneinstrahlung maximal um 45°K. Welche Normalkraft herrscht dann im Mast?  
 $E_S A_S = 300 \text{ MN}$   
 $E_M A_M = 4.000 \text{ MN}$   
 $\alpha_T = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ 1/K}$

