

Fachbereich Bauingenieurwesen

Übungen zur Mathematik 2

Prof. Dr.-Ing. P. Sparla
Dipl.-Math. M. Bauer

Sommersemester 2024
14.05.2024

5. Übung

Aufgabe 21:

Bestimmen Sie das Spatprodukt, sowie das Volumen des, durch die drei Vektoren aufgespannten, Spats. Geben Sie außerdem an, ob die Vektoren ein rechts- oder linkshändiges System aufspannen.

$$\text{i) } \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 22:

Überprüfen Sie, ob die Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} in einer gemeinsamen Ebene liegen.

$$\text{i) } \vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 23:

Die Gerade g verläuft durch den Punkt $P(4|2|3)$ und in Richtung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Welchen Abstand hat der Punkt $Q(4|1|1)$ von g ?

Aufgabe 24:

Gegeben seien die Geraden $g, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7$ durch $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$

$$h_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad h_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$h_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad h_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$h_5: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h_6: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\text{sowie } h_7: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{jeweils mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Untersuchen Sie die Lage der Geraden g zu den Geraden h_i mit $i = 1, \dots, 7$. Berechnen Sie, je nach Lage, Schnittpunkt und Schnittwinkel bzw. den Abstand zwischen den Geraden.

Ergebnisse

- Aufgabe 21:**
- i) $[\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}] = -2 < 0 \Rightarrow$ linkshändiges System; $V = 2$ [VE]
 - ii) $[\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}] = 17 > 0 \Rightarrow$ rechtshändiges System; $V = 17$ [VE]
 - iii) $[\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \Rightarrow$ Die Vektoren spannen keinen Spat auf ($V = 0$ [VE]), sie liegen in einer Ebene.

- Aufgabe 22:**
- i) Die Vektoren liegen in einer gemeinsamen Ebene.
 - ii) Die Vektoren liegen nicht in einer gemeinsamen Ebene, sie spannen einen Spat auf.

Aufgabe 23: Abstand: $d = \sqrt{\frac{3}{2}}$

- Aufgabe 24:**
1. g und h_1 beschreiben dieselbe Gerade.
 2. g und h_2 verlaufen mit Abstand $d = \sqrt{29} \approx 5,385$ [LE] parallel.
 3. g und h_3 schneiden sich im Punkt $S(1|2|5)$ unter einem Winkel von $\varphi \approx 119,3^\circ$.
 4. g und h_4 verlaufen mit einem Abstand von $d = \frac{7}{\sqrt{29}} \approx 1,300$ [LE] windschief.
 5. g und h_5 schneiden sich im Punkt $S(19|-34|-31)$ unter einem Winkel von $\varphi \approx 161,8^\circ$.
 6. g und h_6 beschreiben dieselbe Gerade.
 7. g und h_7 verlaufen mit Abstand $d = \frac{49}{5\sqrt{5}} \approx 4,383$ [LE] windschief.