Differentialrechnung

Prof. Dr.-Ing. Peter Sparla und Dr. Britta Foltz

Achtung!

Dieses Folienskript soll den Studierenden einiges an mechanischer Schreibarbeit abnehmen und dazu beitragen, sich auf das eigentliche Fach und seine vielfältigen Themen konzentrieren zu können.

Es ersetzt keinesfalls eigene, ergänzende Notizen und Aufzeichnungen zu den Lehrinhalten, die während der Vorlesungen vermittelt werden.

Dieses Skript stellt kein Lehrbuch dar!
Nicht alles, was in der Vorlesung erarbeitet wird, ist im Skript enthalten.

Literatur

- Papula, Lothar
  Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler - Band 1
  Vieweg, 2007[11]

- Rjasanowa, Kerstin
  Mathematik für Bauingenieure,
  Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, 2006

Das Tangentenproblem: Beispiel freier Fall

Weg: $s = f(t) = {}^1\!/_2 \cdot g \cdot t^2 \approx 5 \cdot t^2$

Mit $g =$ Fallbeschleunigung
und Startgeschwindigkeit $v_0 = 0$.

$t[s]$	0	1	2	3	4	5
$s[m]$	0	5	20	45	80	125
$v[{}^m\!/_s]$	0	?	?	?	?	?

Frage:

Wie groß ist die Geschwindigkeit beim freien Fall vom Heinrich Herz Turm zum Zeitpunkt $t = 1$, bzw. $t = 2$, usw. …?

Das Tangentenproblem: Beispiel freier Fall

Gesucht: Momentangeschwindigkeit v zur Zeit $t = 1$.

Mit $s(t) = 5 \cdot t^2$ ergibt sich folgende Werte Tabelle für $t \approx 1$:

t	1	1,5	1,2	1,02	1,0001
s(t)	5	11,25	7,2	5,202	5,001

Wir nähern $v(1)$ durch gemittelte Geschwindigkeiten in kleinen Zeitintervallen an:

$$v(1) \approx \bar{v} = \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

t	1,5	1,2	1,02	1,0001
$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$\frac{11{,}25 - 5}{1{,}5 - 1}$ $\approx 12{,}5$	$\frac{7{,}2 - 5}{1{,}2 - 1}$ $\approx 11{,}0$	$\frac{5{,}202 - 5}{1{,}02 - 1}$ $\approx 10{,}10$	$\frac{5{,}001 - 5}{1{,}0001 - 1}$ $\approx 10{,}0005$

Das Tangentenproblem: Beispiel freier Fall

Es ergibt sich

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t) - s(1)}{t - 1} = \frac{5(1 + \Delta t)^2 - 5}{(1 + \Delta t) - 1} = \frac{5 + 10\Delta t + 5\Delta t^2 - 5}{\Delta t} = \frac{10\Delta t + 5\Delta t^2}{\Delta t}$$

d.h. für $\Delta t \neq 0$ erhalten wir $\boxed{\frac{\Delta s}{\Delta t} = 10 + 5\,\Delta t}$ und damit

$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (10 + 5\,\Delta t) = 10\,[{}^{m}/_{s}]}$$

Das Symbol für diesen Grenzwert ist $s'(1)$:

$$v(1) = s'(1) = 10[{}^{m}/_{s}].$$

Ableitung einer Funktion

Gegeben: Eine Funktion $f(x)$.

Gesucht: Die Steigung m_t der Kurventangente t an der Stelle $x = x_0$.

Lösung:

1. Wählen eines Punktes Q des Graphen von f in der Nähe des Punktes $P(\, x_0 \,|\, f(x_0)\,)$: $Q(\, x_0 + \Delta x \,|\, f(x_0 + \Delta x)\,)$ für ein kleines Δx.

2. Die Sekantensteigung durch die Punkte P und Q liefert der so genannte Differenzenquotient: $m_s = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

3. Der Grenzwert der Sekantensteigung für $\Delta x \to 0$ liefert die Tangentensteigung $m_t = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Existiert dieser Grenzwert, so nennt man m_t auch die *Ableitung der Funktion* f an der Stelle $x = x_0$.

Definition: Differenzierbarkeit und Ableitung einer Funktion f

Eine Funktion f heißt an der Stelle $x = x_0$ ***differenzierbar***, *wenn*

$$\lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt

(*erste*) *Ableitung* der Funktion f an der Stelle $x = x_0$.

Schreibweisen für die Ableitung von f an der Stelle x_0 :

$$f'(x_0) \quad \text{oder} \quad \frac{df}{dx}(x_0) \quad \text{oder} \quad \frac{df(x_0)}{dx} .$$

Bemerkungen:

- Können wir die Ableitung in jedem Punkt eines ganzen Intervalls bestimmen, so erhalten die so genannte **Ableitungsfunktion** f' von f.

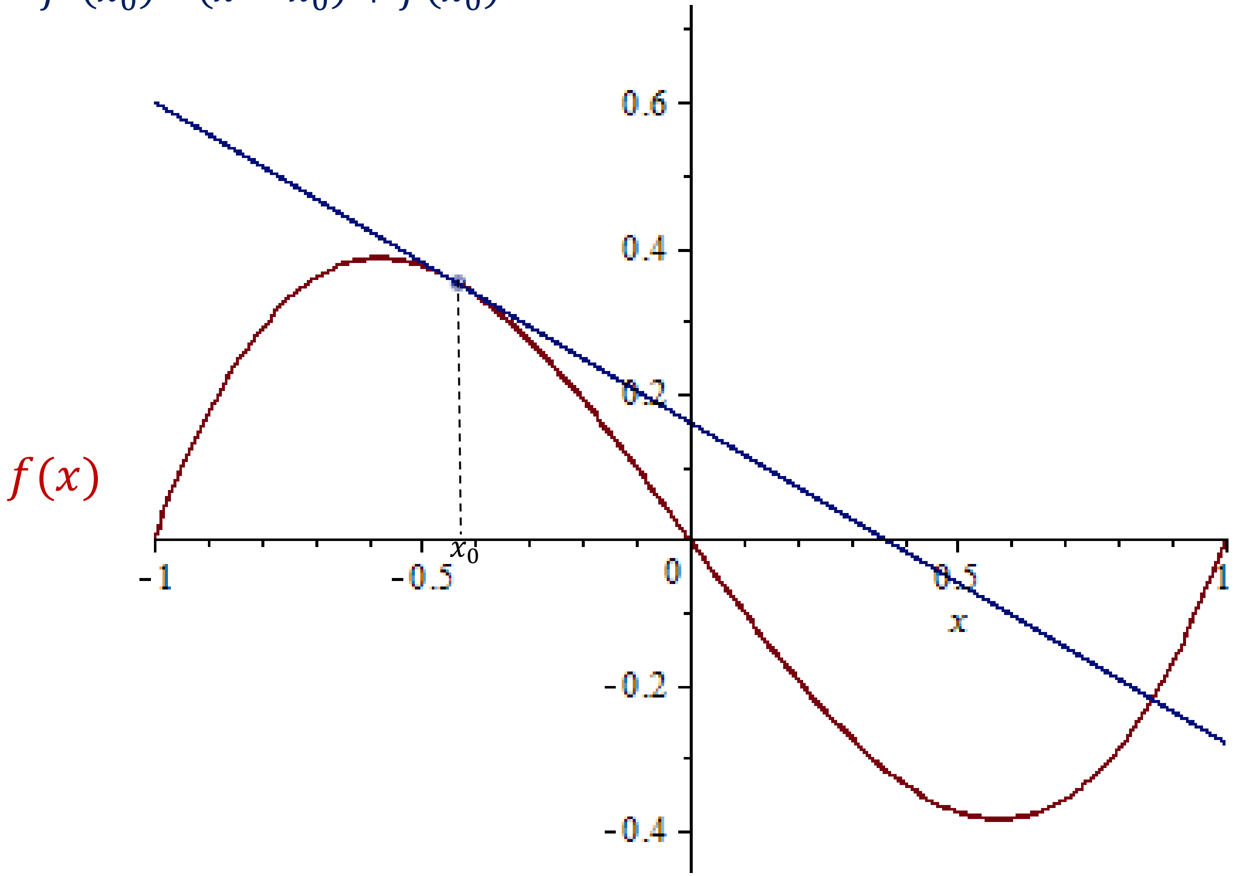
- Das Bestimmen der Ableitung einer Funktion nennt man
  Differentiation oder Differenzieren.

- Geometrische Interpretation:
  Ist die Ableitungsfunktion f' an der Stelle x definiert, so existiert eine eindeutige **Tangente** ***t*** an die Kurve der Funktion f im Punkt $\big(x, f(x)\big)$.

- f' hat dann an der Stelle x gerade den Wert der Tangentensteigung.

Ableitung und Tangente

$t(x) = f'(x_0) * (x - x_0) + f(x_0)$



Bemerkungen:

- Der Term $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ heißt **Differenzenquotient.**

- Der Grenzwert $\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

  des Differenzenquotienten wird auch **Differentialquotient** genannt.

- Die Terme dx und df heißen **Differentiale.**

  Sie stellen infinitesimal kleine Zahlenwerte dar (vgl. Tangentenproblem). In manchen Anwendungen rechnet man mit Differentialen fast wie mit "normalen" Variablen. (Kettenregel, Integration durch Substitution und Lösung bestimmter Differentialgleichungen)

Ableitung der elementaren Funktionen:

$f(x)$	$f'(x)$
$c = const$	0
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ $= \tan^2(x) - 1$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
$\ln(\mathrm{x})$	$\frac{1}{\mathrm{x}}$
$\log_{\mathrm{a}}(x)$	$\frac{1}{x \cdot \ln(\mathrm{a})}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$

Ableitungsregeln:

Ableitung konstanter Funktionen:

Sei f ist eine konstante Funktion, d.h. $f(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und ein $c \in \mathbb{R}$.

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0.$

Faktorregel:

Sei g eine differenzierbare Funktion, $c \in \mathbb{R}$ und $f(x) = c \cdot g(x)$.

Dann gilt: $f(x) = c \cdot g(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = c \cdot g'(x).$

Ableitungsregeln:

Summenregel:

Seien f und g differenzierbare Funktionen, so gilt

$$h(x) = f(x) + g(x) \quad \Rightarrow \quad h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

und

$$h(x) = f(x) - g(x) \quad \Rightarrow \quad h'(x) = f'(x) - g'(x).$$

- Die Summenregel können Sie auch auf mehr als zwei Funktionen anwenden:

$$h(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x) \pm \cdots \quad \Rightarrow \quad h'(x) = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm f_3'(x) \cdots$$

- Beispiel: $h(x) = x^2 + \ln x + \cos(x) \Rightarrow h'(x) = 2x + \frac{1}{x} + (-\sin(x))$

Produktregel:

Seien u und v differenzierbare Funktionen, dann gilt

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

- Die Produktregel können Sie auch auf mehr als zwei Funktionen anwenden:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$$

$$\Rightarrow \qquad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v'(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot w'(x)$$

- Beispiel: $f(x) = (x^2 + 1) * \sin(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = (2x) \cdot \sin(x) + (x^2 + 1) \cdot \cos(x)$$

Quotientenregel:

Seien u und v differenzierbare Funktionen dann gilt:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

- Im Sonderfall, dass u eine konstante Funktion ist, d.h. für $u(x) = c$, gilt:

$$f(x) = \frac{c}{v(x)} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = -c\,\frac{v\prime(x)}{v^2(x)}.$$

- Beispiel: $f(x) = \frac{2x^2+1}{\sin(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x\cdot\sin(x) - \left(2x^2+1\right)\cos(x)}{\sin^2(x)}$

Bemerkungen:

Zum besseren Merken eignen sich die „Kurzschreibweisen“ der Ableitungsregeln:

- Produktregel: $f = u \cdot v \quad \Rightarrow \quad f' = u' \cdot v + u \cdot v'$

- Quotientenregel: $f = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad f' = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}$

Ableitungsregeln:

Kettenregel:

Sei die differenzierbare Funktion $F(x) = f(\,h(x)\,)$ gegeben. Dann gilt :

$$F'(x) = \left(\frac{df}{dh} \cdot \frac{dh}{dx}\right)(x) = \underbrace{f'\big(\,h(x)\big)}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{h'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$$

- $F(x) = \sin(e^x)\;,\quad f(h) = \sin(h),\; h(x) = e^x$

$$\Rightarrow F'(x) = f'\big(h(x)\big) \cdot h'(x) = \cos(e^x) \cdot e^x$$

- Für mehr als zwei geschachtelte Funktionen, z.B.: $F(x) = \sin(e^{2x^2})$

$$\Rightarrow F'(x) = \cos\big(e^{2x^2}\big) \cdot e^{2x^2} \cdot 4x$$

Gesucht: Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^x$.

Lösung:

Anwenden des Logarithmus naturalis auf die Funktionsgleichung liefert

$$f(x) = x^x \quad \Leftrightarrow \quad \ln[f(x)] = \ln(x^x) = x\ln(x)\,.$$

Mit Hilfe der Kettenregel ergibt sich $F(x) = \ln[f(x)] \implies F'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Mit Hilfe der Produktregel ergibt sich $(x \cdot \ln(x))' = 1 \cdot \ln(x) + \frac{x}{x} = \ln(x) + 1$.

D.h. es folgt $\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(x) + 1$ und damit $f'(x) = x^x \cdot [\ln(x) + 1]$.

Also gilt: $\quad f(x) = x^x \implies f'(x) = x^x \cdot [\ln(x) + 1]$.

Ableitung der Umkehrfunktion:

Gesucht: Die Ableitung g' der Umkehrfunktion $g(x) = f^{-1}(x)$.

Lösung:

1. Berechnen der Umkehrfunktion:
   Wir setzten $y = f(x)$ und lösen diese Gleichung nach x auf: $x = f^{-1}(y) = g(y)$.
   Es gilt: $f(x) = f\big(g(y)\big) = y$.

2. Anwenden der Kettenregel auf $f\big(g(y)\big) = y$ liefert:

$$\frac{d}{dy} f\big(g(y)\big) = \frac{d}{dy} y \quad \Rightarrow \quad f'(x) \cdot g'(y) = 1 \quad \Rightarrow \quad g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad (f'(x) \neq 0)$$

3. Mit $g(y) = x$ ergibt sich $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \quad (f'(g(y)) \neq 0)$.

4. Somit erhalten wir durch Ersetzten der Variablen y durch x sowohl die Umkehrfunktion $g(x)$ und ihre Ableitungsfunktion $g'(x)$.

Höhere Ableitungen

Sei f' die Ableitungsfunktion einer Funktion f.

- Falls f' selber eine differenzierbare Funktion ist, dann kann auch sie abgeleitet werden.
- Wir erhalten dann eine so genannte **höhere Ableitung**, *die* **zweite Ableitung** der Funktion f.
- Schreibweisen: $\frac{d^2 f}{dx^2}(x)$, $f''(x)$ oder auch $f^{(2)}(x)$.
- Analog erhalten und schreiben wir für die dritte Ableitung:

$$\frac{d^3 f}{dx^3}(x),\quad f'''(x) \text{ oder auch } f^{(3)}(x)$$

und für die n-te Ableitung ($n \in \mathbb{N}$) : $\frac{d^n f}{dx^n}(x)$ oder auch $f^{(n)}(x)$.

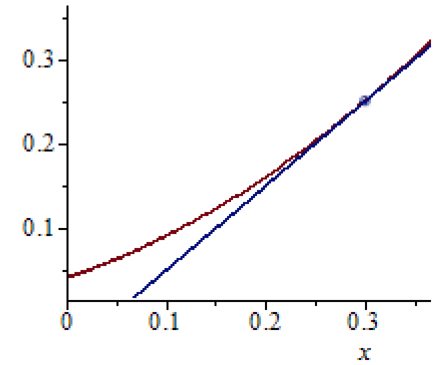
Beispiele für höhere Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
$2x^3$	$6x^2$	$12x$
$x \cdot \sin(x)$	$\sin(x) + x\cos(x)$	$2\cos(x) - x\sin(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-x^{-2}$

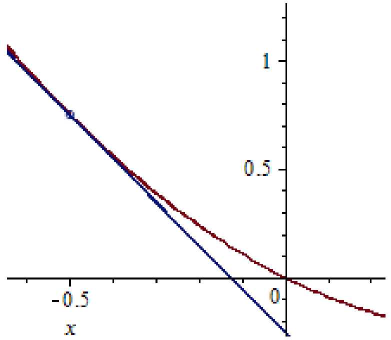
Die 1. Ableitung f' einer Funktion f gibt die **Steigung** der Kurventangente im Punkt $(x \mid f(x))$ an.

Sie gestattet daher eine Aussage über das **Monotonieverhalten** der Funktionskurve an der Stelle x.

$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow$ Die Funktionskurve wächst streng monoton beim Durchgang durch den Punkt $(x \mid f(x))$.



$f'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow$ Die Funktionskurve fällt streng monoton beim Durchgang durch den Punkt $(x \mid f(x))$.

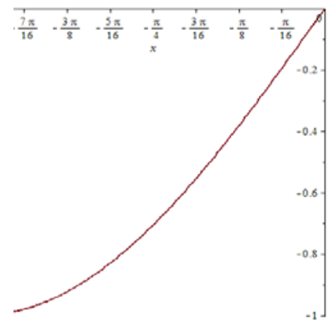
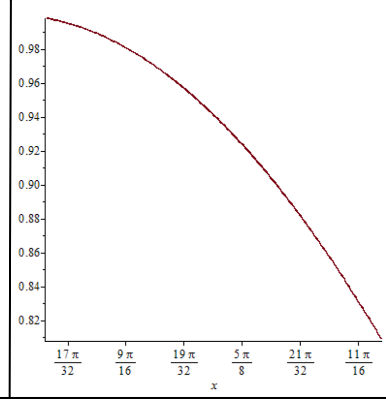


(Dabei wird die Kurve stets im Sinne zunehmender x-Werte durchlaufen.)

Charakteristische Kurvenpunkte des Graphen einer Funktion
Geometrische Deutung der 2. Ableitung

Die 2. Ableitung f'' einer Funktion f beschreibt das Monotonieverhalten der 1. Ableitung von f im Punkt $(x \mid f(x))$.

Sie gestattet daher eine Aussage über das Krümmungsverhalten der Funktionskurve an der Stelle x.

$f''(x) > 0 \quad \Leftrightarrow$ Die Funktionskurve ist linksgekrümmt beim Durchgang durch den Punkt $(x \mid f(x))$.		$\sin''\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) < 0$
$f''(x) < 0 \quad \Leftrightarrow$ Die Funktionskurve ist rechtsgekrümmt beim Durchgang durch den Punkt $(x \mid f(x))$.		$\sin''\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) < 0$

(Dabei wird die Kurve stets im Sinne zunehmender x-Werte durchlaufen.)

Krümmung einer ebenen Kurve

Der Graph einer Funktion f stellt eine so genannte ebenen Kurve dar.

Wie gesehen, können wir mit Hilfe der 2. Ableitung von f eine qualitative Aussage über das Krümmungsverhalten dieser Kurve machen.

Die Stärke der Kurvenkrümmung (gradlinig, schwach, stark) wird über ein quantitatives Maß bestimmt:

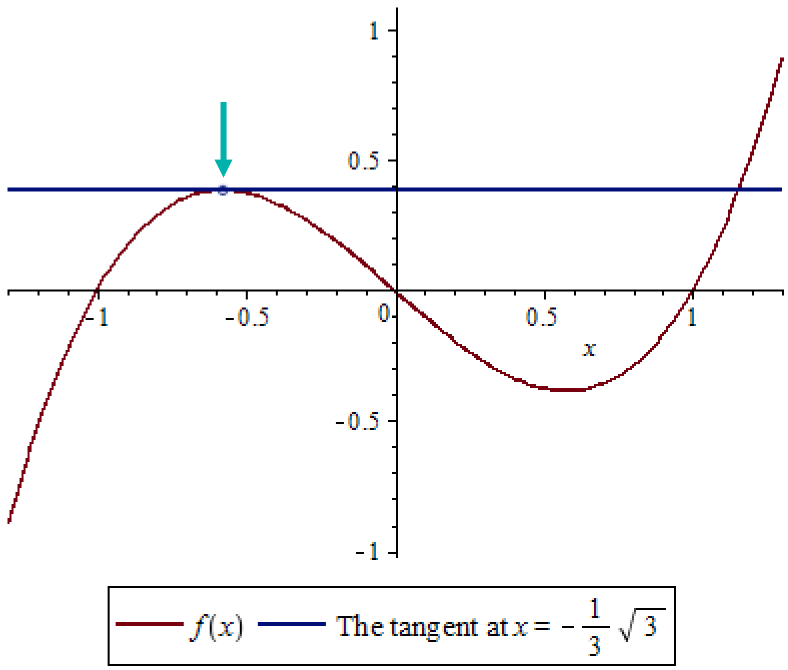
Die Krümmung K einer ebenen Kurve im Punkt $P(x, f(x))$ ist gegeben durch:

$$K(x) = \frac{f''(x)}{[1+(f'(x))^2]^{3/2}}\ .$$

Es gilt: $K(x) > 0 \Leftrightarrow$ Linkskrümmung der ebenen Kurve
$K(x) < 0 \Leftrightarrow$ Rechtskrümmung der ebenen Kurve

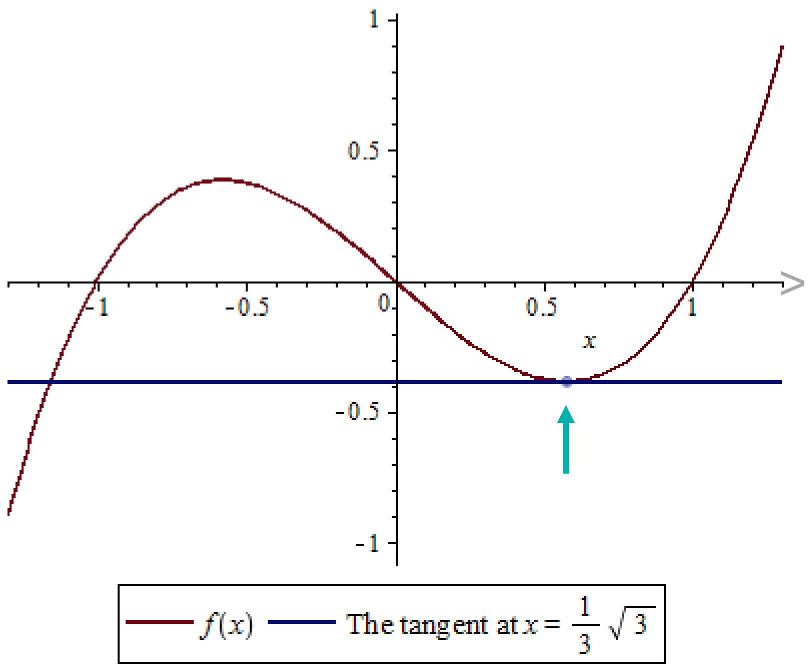
Relative und lokale Extrema (Hoch- und Tiefpunkte)

Eine Funktion f besitzt an der Stelle x_0 ein *relatives Maximum*, wenn für alle x mit $x \neq x_0$ in einer kleinen Umgebung von x_0 gilt: $f(x_0) > f(x)$.



Relative und lokale Extrema (Hoch- und Tiefpunkte)

Eine Funktion f besitzt an der Stelle x_0 ein *relatives Minimum*, wenn für alle x mit $x \neq x_0$ in einer kleinen Umgebung von x_0 gilt: $f(x_0) < f(x)$.



Bemerkungen:

- Eine Funktion kann viele lokale Maxima oder Minima besitzen.
- Statt „relativ“ sagt man auch „lokal“, also z.B. „lokales Maximum…“
- Hat die Funktion ein Maximum, so heißt der Kurvenpunkt *Hochpunkt*.
- Hat die Funktion ein Minimum, so heißt der Kurvenpunkt *Tiefpunkt*.
- Lokale Maxima und Minima werden auch als lokale *Extrema* oder auch lokale *Extremwerte* bezeichnet.
- In einem Hoch- oder Tiefpunkt verläuft die Kurventangente stets waagerecht , d.h. es gilt $f'(x_0) = 0$.

Relative und lokale Extrema (Hoch- und Tiefpunkte)

Hat eine Funktion ein relatives Extremum, so muss die Kurve der Funktion im entsprechenden Punkt eine waagerechte Tangente haben:

Daraus ergibt sich die

Notwendige Bedingung für relative Extremwerte:

Besitzt eine Funktion f an der Stelle x_0 eine lokales Extremum, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Achtung:

Jede konstante Funktion hat nur waagerechte Tangenten. Die oben formulierte Bedingung ist eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung!

Eine Funktion mit einer waagerechten Tangente muss noch lange keinen Extremwert haben!

„**Hinreichend**“ ist:

Eine Funktion besitzt in x_0 ein relatives Extremum,

wenn die dortige **Kurventangente waagerecht** verläuft **und**

die Kurve an dieser Stelle eine

Rechts- oder eine Linkskrümmung besitzt.

„**Hinreichend**“ ist:

Eine Funktion besitzt in x_0 ein relatives Extremum,

wenn $f'(x_0) = 0$ **und**

$f''(x_0) \neq 0$ gilt.

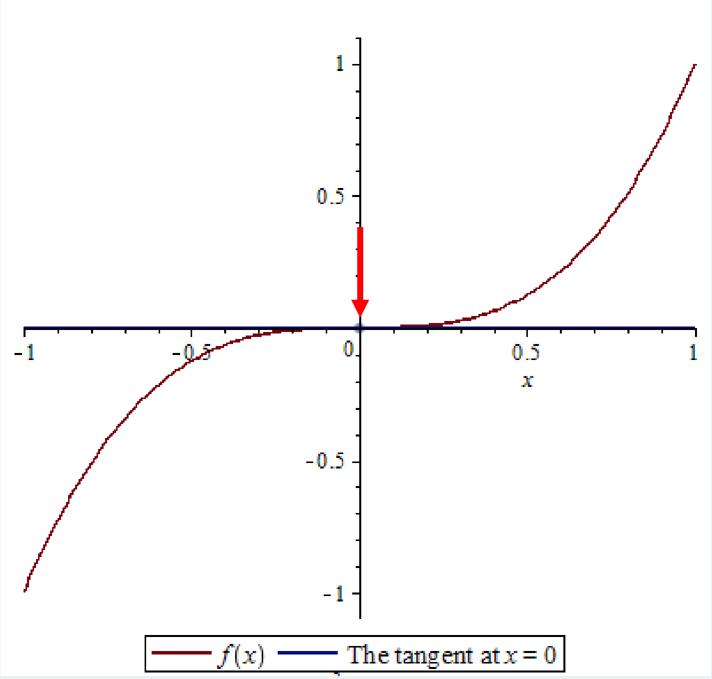
Beispiele zur hinreichenden Bedingung für **Extrema**

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f''(0) = 6x\,\Big|_{x=0} = 0$$

Hinreichende Bed. nicht erfüllt!



FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

„**Hinreichend**“ ist:

Eine Funktion besitzt in x_0 ein **relative Maximum**,

wenn $f'(x_0) = 0$ **und**

$f''(x_0) < 0$ gilt.

Beispiele zur hinreichenden Bedingung für **Maxima**

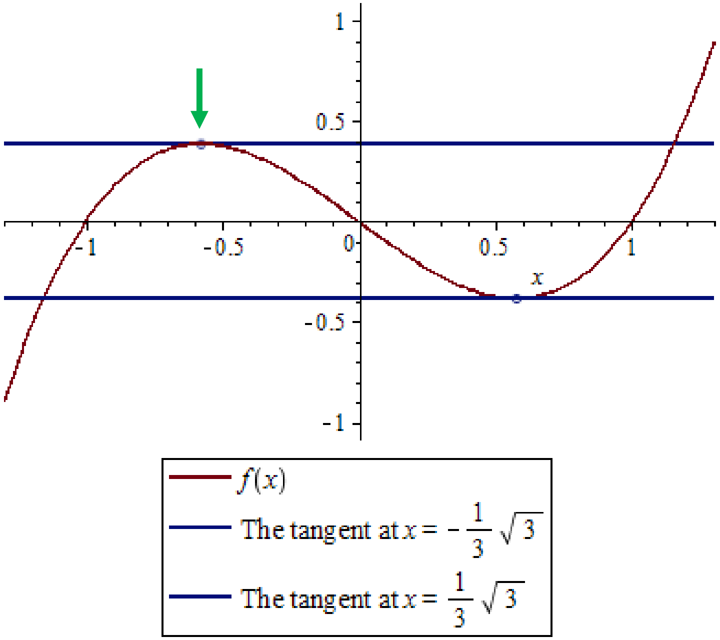
$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - x}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 6x\,\Big|_{\frac{-1}{\sqrt{3}}} = -6\frac{1}{\sqrt{3}} < \mathbf{0}$$

Hinreichende Bedingung erfüllt!

f hat an der Stelle $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ein relatives Maximum



„**Hinreichend**“ ist:

Eine Funktion besitzt in x_0 ein **relative Minimum**,

wenn $f'(x_0) = 0$ **und**

$f''(x_0) > 0$ gilt.

Beispiele zur hinreichenden Bedingung für **Minima**

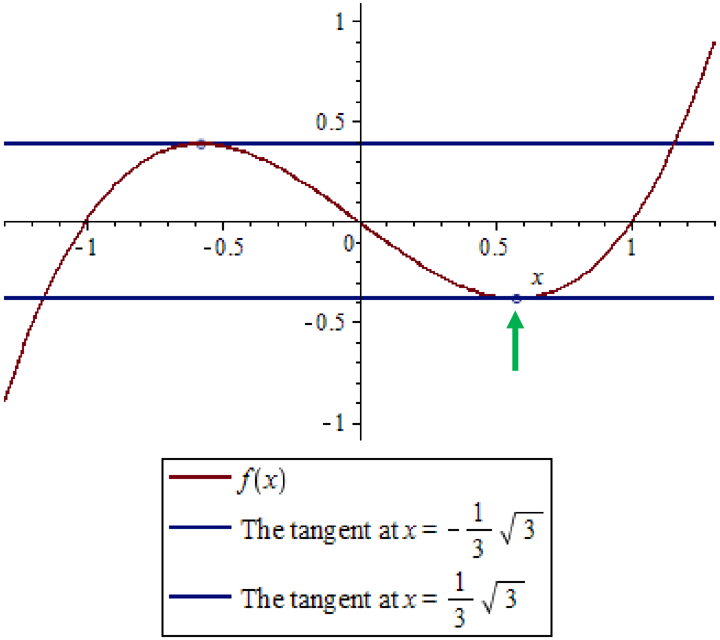
$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - x}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 6x\,\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 6\frac{1}{\sqrt{3}} > 0$$

Hinreichende Bedingung erfüllt!

f hat an der Stelle $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ein relatives Minimum



Wendepunkte, Sattelpunkte

Zwischen einem Hoch- und einem Tiefpunkt muss die Kurve der Funktion den Drehsinn ändern. Das heißt:

Auch jene Kurvenpunkte - **Wendepunkte** - sind von Bedeutung, in denen die Funktion ihren Drehsinn ändert,

In Wendepunkten gilt $f''(x) = 0$,
weil ein Wechsel zwischen $f''(x) > 0$ und $f''(x) < 0$ erfolgt.

Notwendiges Kriterium für Wendepunkte:

Besitzt die Funktion f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt,

so gilt $f''(x_0) = 0$.

Hinreichendes Kriterium für Wendepunkte:

Die Funktion f besitzt an der Stelle x_0 einen Wendepunkt,
wenn $f''(x_0) = 0$ **und** $f'''(x_0) \neq 0$ gilt.

Beispiele zur hinreichenden Bed. für Wendestelle

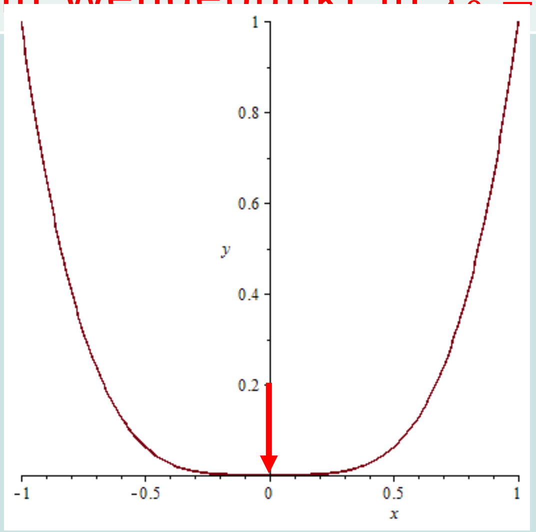
$$\boldsymbol{f(x) = x^4}$$

$$f'(x) = 4x^3$$

$$f''(0) = 12x^2 = 0$$

$$f'''(0) = 24x\Big|_{x=0} = 0$$

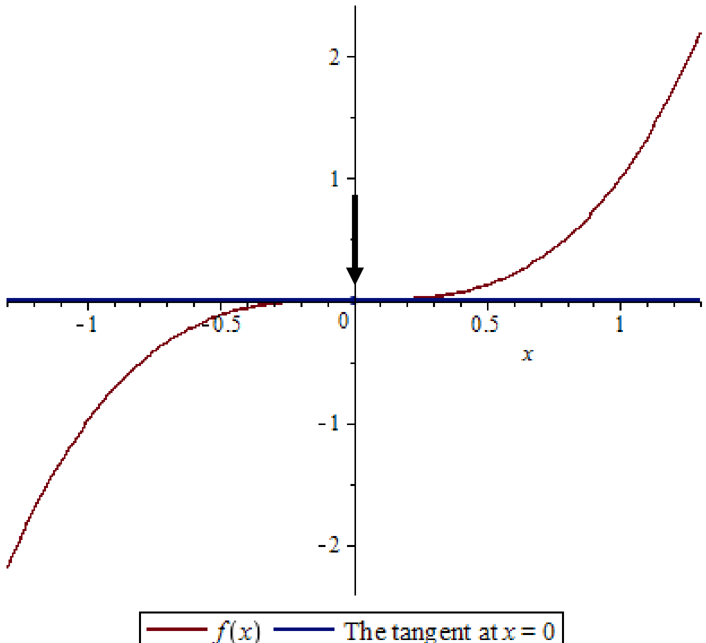
Hinreichende Bed. nicht erfüllt!
Kein Wendepunkt in $x_0 = 0$



Wendepunkte, Sattelpunkte

Definition:
Eine Funktion f hat einen ***Sattelpunkt*** im Punkt x_0, wenn sie in diesem Punkt einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente hat:

Die Funktion f hat genau dann einen ***Sattelpunkt***, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ gilt.



At $x = 0$, for the function $f(x) = x^3$, a graph of $f(x)$ and a tangent line.

Satz:

Eine Funktion f besitzt an der Stelle x_0 ein relatives Maximum (Minimum),

wenn gilt:

Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, das gerade ist mit

1. $f^{(k)}(x_0) = 0$ für alle $1 \leq k < n$,
   d.h. alle Ableitungen kleinerer Ordnung verschwinden

2. $f^{(n)}(x_0) < 0 \quad (f^{(n)}(x_0) > 0)$,
   d.h. die erste nichtverschwindende Ableitung ist gerader Ordnung und kleiner Null (größer Null).

Ist n ungerade, so besitzt f an der Stelle x_0 einen Sattelpunkt.

Kurvendiskussionen

- Definitionsbereich
- Symmetrie
- Nullstellen
- Definitionslücken, Pole samt senkrechter Asymptote
- Ableitungen (maximal bis 3. Ordnung)
- Kritische Stellen → Extrema (Hoch-/Tiefpunkte)
- Wendepunkte, Sattelpunkte
- Verhalten der Funktion im Unendlichen
- SKIZZE

Näherungsverfahren zur Nullstellenbestimmung

Häufig ist es nicht möglich oder auch nicht nötig, die Nullstellen einer Funktion f exakt zu berechnen.

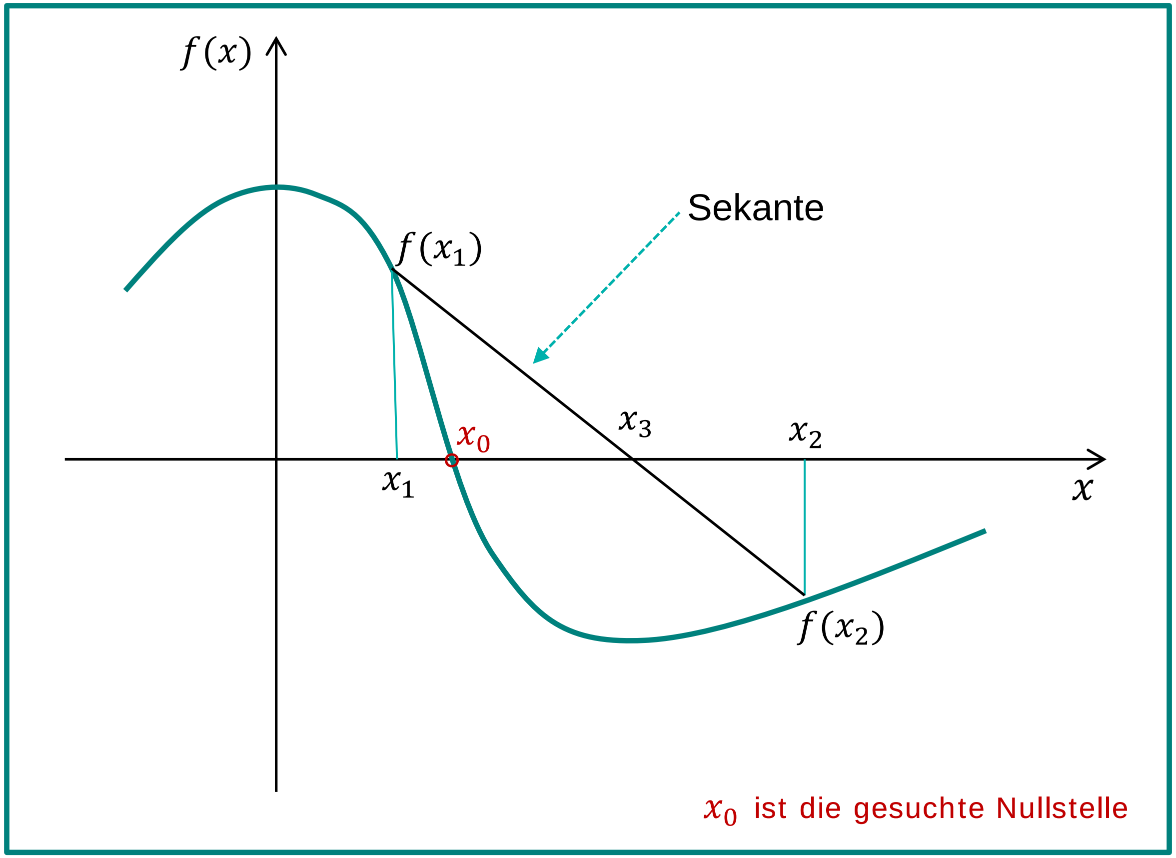
Zwei einfache und doch effektive Näherungsverfahren sind

- Das Newton Verfahren (Tangentenverfahren)
- Die Regula falsi (Sekantenverfahren)

Regula Falsi - Sekantenverfahren

Gegeben: Eine stetige Funktion f und zwei Stellen x_1, x_2 mit $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$.

Gesucht: Eine Nullstelle der Funktion f, d.h. eine Stelle x_0 mit $f(x_0) = 0$.



Die Verbindungsgerade zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ heißt Sekante.

Der Schnittpunkt x_3 der Sekante mit der x – Achse ist ein verbesserter Näherungswert für x_0.

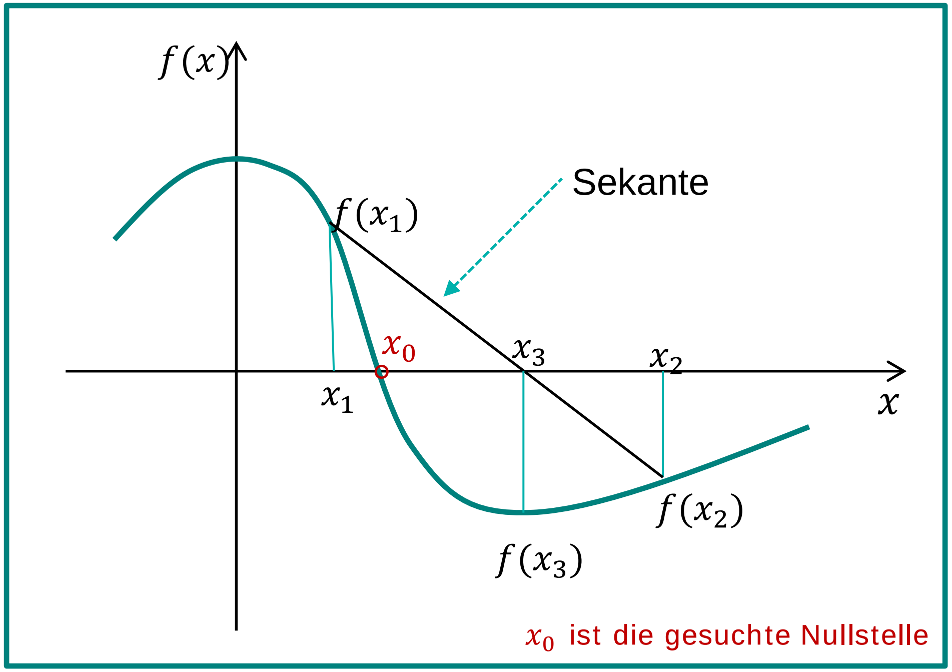
Im nächsten Schritt wiederholt man das Verfahren mit x_3 sowie x_1 oder x_2, je nach Vorzeichen von $f(x_3)$

Regula Falsi - Sekantenverfahren

- Für die Sekante $s(x)$ gilt:

mit $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$ und $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ergibt sich

$$s(x) = m(x - x_1) + y_1.$$



- Für die Nullstelle x_3 gilt damit:

$$m = \frac{-y_1}{x_3 - x_1} \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = x_1 - \frac{y_1}{m}$$

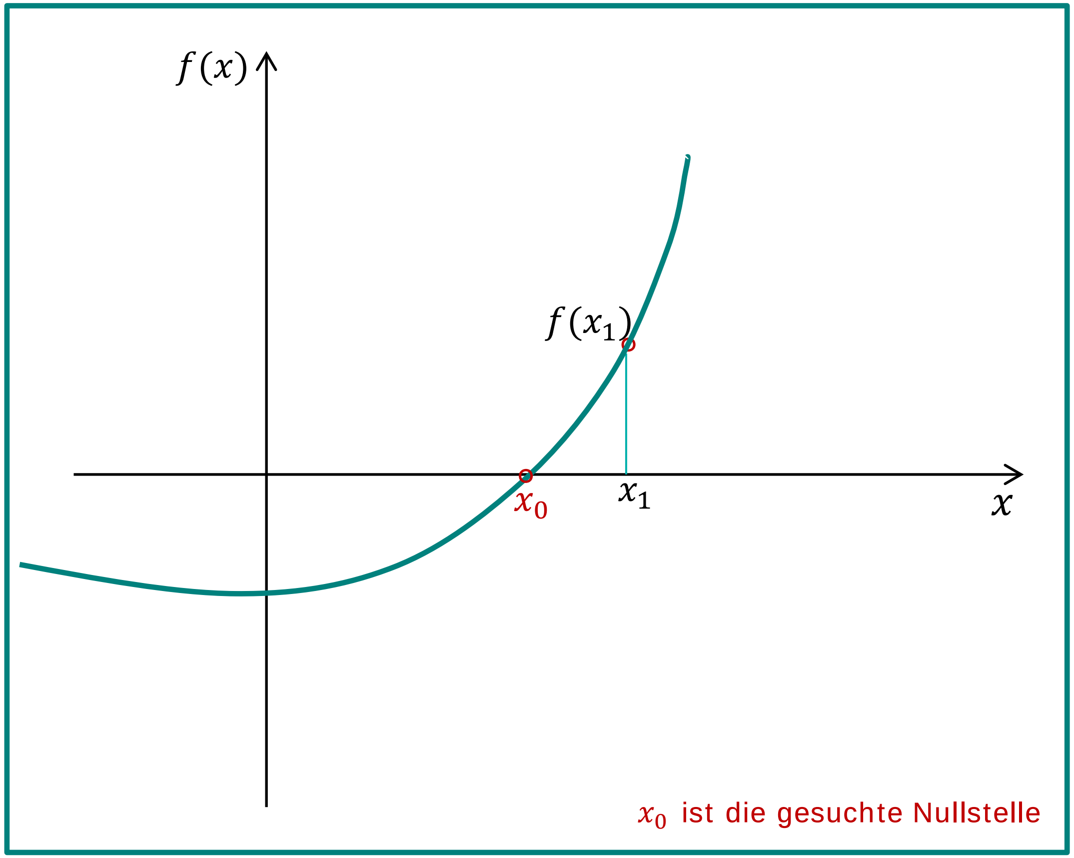
- Im nächsten Iterationsschritt wird das Verfahren wiederholt mit x_3 und x_i. Dabei ist $i = 1$ oder $i = 2$ so gewählt, dass wieder $f(x_3) \cdot f(x_i) < 0$ gilt.

- Bemerkung: Je besser die Startwerte desto schneller die Konvergenz

Newton Verfahren - Tangentenverfahren

Gegeben: Eine differenzierbare Funktion f und ein Kurvenpunkt $P(x_1, f(x_1))$ in der Nähe einer Nullstelle x_0 von f.

Gesucht: Die Nullstelle x_0 von f.



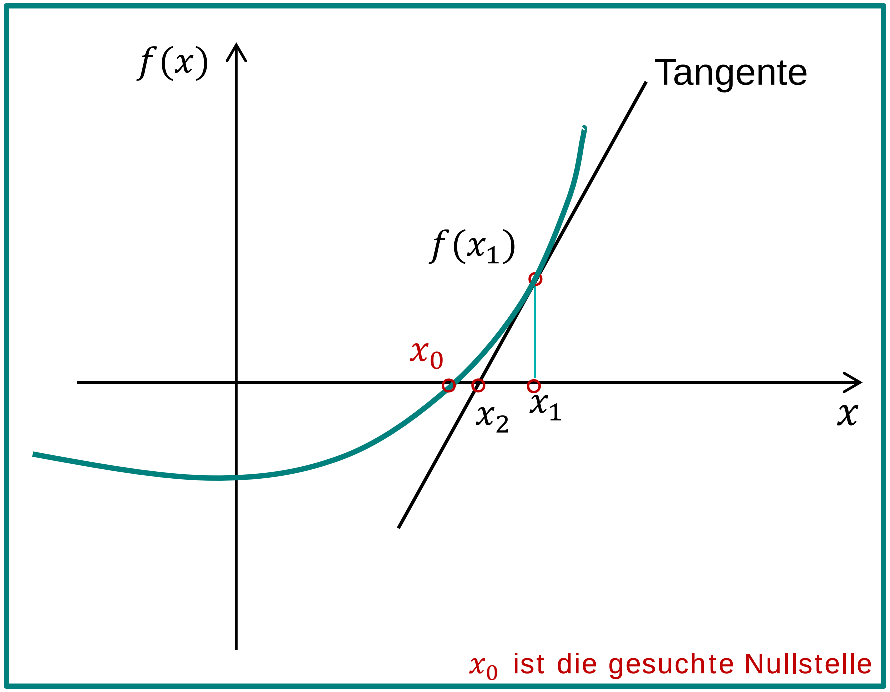
Newton Verfahren - Tangentenverfahren

1. Schritt:

Die Kurventangente durch $P(x_1, f(x_1))$ schneidet die x- Achse in x_2.

Dabei gilt $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

Achtung: $f'(x_1) \neq 0$!



2. Schritt:

Der Punkt $P(x_2, f(x_2))$ ist Startpunkt des nächsten Iterationsschrittes.

Die allgemeine Iterationsvorschrift ist $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 1,2,3 \ldots$