Fachbereich Bauingenieurwesen

Mathematik 1 für Bauingenieure

Prof. Dr.-Ing. P. Sparla
16. März 2016

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Aufgabe 1: (2)

Berechnen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 1$ und $x \neq 2$ die Lösung nachfolgender Gleichungen.

i) $\dfrac{x^2-6}{x-2} = \dfrac{-x}{x-2}$

ii) $\dfrac{-1}{x-1} = (x-1)^2$

Aufgabe 2: (5)

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung

$$\left|\frac{1}{4}x - 3\right| < \left|4 - \frac{1}{2}x\right| + \frac{1}{2}$$

erfüllen.

Aufgabe 3: (3)

Ermitteln Sie für $x \in \mathbb{R}$ mit Hilfe des Tangentenverfahrens von Newton eine Näherung für die Nullstelle der Funktion $f(x) = -x^3 + 2x + 2$ so, dass mit diesem Wert die Nullstelle auf mindestens 3 Nachkommastellen genau berechnet werden kann. Benutzen Sie dazu den Startwert $x_0 = 1{,}5$ und geben Sie alle Zwischenergebnisse auf 4 Nachkommastellen gerundet an.
(Die Konvergenz des Verfahrens ist gewährleistet.)

Aufgabe 4: (6)

Gegeben sei f durch

$$f(x) = \frac{(-x^2 - 2x + 35)(x-5)}{(x+12)^2\,(x+7)\,(x-10)}\,.$$

Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f und diskutieren Sie die so erhaltene Funktion bezüglich Art der Definitionslücken, Art der Nullstellen und dem Verhalten im Unendlichen. Berechnen Sie im Falle einer hebbaren Definitionslücke den zugehörigen Grenzwert und skizzieren Sie f anhand Ihrer Ergebnisse.

Aufgabe 5: (4)

Gegeben seien die beiden Punkte $P(2|2)$ und $Q(4|1)$ sowie die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a,b > 0)$$

einer Ellipse. Bestimmen Sie die beiden Halbachsen a und b.

Aufgabe 6: (2)

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = \pi\,|\sin(x)|$ für $x \in [-\pi;\pi]$.

b) Skizzieren Sie die Funktionen $g(x) = \mathrm{e}^x$ und $h(x) = \pi^x$ für $x \in \mathbb{R}$ in <u>ein</u> Koordinatensystem.

Aufgabe 7: (3)

Bilden Sie jeweils die erste Ableitung folgender Funktionen.

i) $f(x) = \frac{1}{2}\ln(x)\cdot\cos(x)\cdot\mathrm{e}^{-x^2} \qquad (x > 0)$

ii) $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\cos\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)\right) \qquad \left(\cos\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right) > 0\right)$

iii) $f(x) = \dfrac{3x\sin(x)}{\mathrm{e}^{3x}} \qquad (x \in \mathbb{R})$

Aufgabe 8: (7)

Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = (x^2 - 1)\,\mathrm{e}^{-2x} \qquad \text{für} \qquad x \in \mathbb{R}$$

bezüglich den Schnittpunkten mit den Achsen, Symmetrieverhalten, Extrem- und Wendepunkte sowie dem Verhalten im Unendlichen. Fertigen Sie anhand Ihrer Ergebnisse eine Skizze an.

[Kontrollergebnis: $f'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}(x^2 - x - 1)$]

Aufgabe 9: (5)

Lösen Sie folgende Integrale.

i) $\int_{-1}^{0} 4x^3\,(1-x^2)^5 \; \mathrm{d}x$

ii) $\int \mathrm{e}^x \cdot \sinh(2x) \; \mathrm{d}x$

Aufgabe 10: (3)

Lösen Sie das Integral

$$\int \frac{x^2+6x-37}{x^2+3x-10} \; \mathrm{d}x \, .$$

Ergebnisse zur Klausur vom 16. März 2016

Aufgabe 1: i) $\frac{x^2-6}{x-2} = \frac{-x}{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad x = -3$

ii) $\frac{-1}{x-1} = (x-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

Aufgabe 2: $\left|\frac{1}{4}x - 3\right| < \left|4 - \frac{1}{2}x\right| + \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x < 6$ oder $x > \frac{26}{3}$

Aufgabe 3: Die gesucht Näherung ist $x_4 = 1{,}7693$ mit $f(1{,}7693) = -0{,}000$.

Aufgabe 4: Definitionsbereich:

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq -12; -7; 10\}$

Art der Definitionslücken:

$x = -12$: Polstelle ohne VZW

$x = 10$: Polstelle mit VZW

$x = -7$: hebbare Lücke mit

$$\lim_{x \to -7} f(x) \approx 0{,}34$$

Aus programmtechnischen Gründen kann die Skizze derzeit nicht dargestellt werden.

Art der Nullstelle: $x = 5$ ohne VZW

Verhalten im Unendlichen: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0^{\mp}$

Aufgabe 5: $a = \sqrt{20}, \; b = \sqrt{5}$

Aufgabe 6: (Aus programmtechnischen Gründen ...)

Aufgabe 7: i) $f'(x) = \frac{1}{2} e^{-x^2} \left(\frac{1}{x}\cos(x) - \ln(x)\sin(x) - 2x\ln(x)\cos(x)\right)$

ii) $f'(x) = x e^{-x^2} \tan(e^{-x^2})$

iii) $f'(x) = \frac{3\sin(x) + 3x\cos(x) - 9x\sin(x)}{e^{3x}}$

Ergebnisse zur Klausur vom 16. März 2016: Fortsetzung

Aufgabe 8: Schnittpunkte mit den Achsen:

$S_y(0|-1), N_1(-1|0), N_2(1|0)$

Symmetrieverhalten:

f ist nicht symmetrisch.

Extrempunkte:

$T(-0,62|-2,13), H(1,62|0,06)$

Wendepunkt:

$W_1(-0,22|-1,48), W_2(2,22|0,05)$

Verhalten im Unendlichen:

$f(x) \xrightarrow{x\to-\infty} \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0^+$

Aus programmtechnischen Gründen kann die Skizze derzeit nicht dargestellt werden.

Aufgabe 9: i) $\displaystyle\int_{-1}^{0} 4x^3\,(1-x^2)^5\ \mathrm{d}x = \int_0^1 -2\,(1-u)\,u^5\ \mathrm{d}u = -\frac{1}{21}$

ii) $\displaystyle\int e^x \cdot \sinh(2x)\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{3}e^x\,(\sinh(2x) - 2\cosh(2x)) + c \qquad (c \in \mathbb{R})$

Aufgabe 10: $\displaystyle\int \frac{x^2+6x-37}{x^2+3x-10}\ \mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{3}{(x-2)} + \frac{6}{(x+5)}\right)\ \mathrm{d}x$

$= x - 3\ln|x-2 + 6\ln|x+5| + c \qquad (c \in \mathbb{R})$

HINWEIS: Alle Skizzen werden nachgereicht und können bis dahin bei Frau Bauer im Büro eingesehen werden.

Stand: 16.03.2017