Fachbereich Bauingenieurwesen

Mathematik 1

Prof. Dr.-Ing. P. Sparla

4. August 2021

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Beachten Sie:

Die Lösungswege der Aufgaben, inklusive der Begründungen und Nebenrechnungen, müssen deutlich erkennbar sein. Es muss also nachvollziehbar sein, wie Sie zu Teil-/Zwischenergebnissen bzw. Endergebnissen gekommen sind.

Fragen werden während der Klausur nicht beantwortet. Sollten Sie ein Problem mit einer Aufgabe haben und nicht weiterkommen, so treffen Sie eine sinnvolle Annahme, um die Aufgabe lösen zu können und erläutern Sie diese, gegebenenfalls. Bei der Korrektur kann dann entschieden werden, wie dies zu bewerten ist.

Aufgabe 1: (1)

Berechnen Sie die Lösung der Gleichung $\dfrac{2x-2}{x} = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$.

Aufgabe 2: (5)

Berechnen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung

$$2\,|3+x| - 1 \geq |3x-6|$$

erfüllen.

Aufgabe 3: (2)

Bringen Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{6}{5}$ mit $x \in \mathbb{R}$ auf Scheitelpunktform und erläutern Sie, wie die Funktion im Vergleich zur Normalparabel aussieht und liegt.

Aufgabe 4: (2)

a) Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten der $f(x) = (4x^3 - x)\,\mathrm{e}^{x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie das Verhalten im Unendlichen der Funktion $f(x) = (x+100)\,\mathrm{e}^{-x}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5: (6)

Gegeben sei f durch

$$f(x) = \frac{(x+5)^2\,(x-1)}{(x+20)\,(x-1)\,(x^2-30x+225)}\,.$$

Bestimmen Sie die kanonische Linearfaktorzerlegung, den maximalen Definitionsbereich sowie die gekürzte Version von f. Diskutieren Sie die so erhaltene Funktion bezüglich Art der Definitionslücken, Art der Nullstellen und dem Verhalten im Unendlichen. Berechnen Sie im Falle einer hebbaren Definitionslücke den zugehörigen Grenzwert und skizzieren Sie f anhand Ihrer Ergebnisse.

Aufgabe 6: (2)

Skizzieren Sie f und g unterscheidbar in ein gemeinsames Koordinatensystem.

i) $f(x) = |\sinh(x)|$ und $g(x) = -\cosh(x)$ für $x \in [-3;3]$

ii) $f(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ und $g(x) = \mathrm{e}^{-x} - 2$ für $x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 7: (3)

Bilden Sie jeweils die erste Ableitung folgender Funktionen.

i) $f(x) = \cos(4\ln(x^2))$ $\quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 0)$

ii) $f(t) = -3t^3 \cdot \mathrm{e}^{-3t} \cdot \sin(x)$ $\quad (t \in \mathbb{R})$

iii) $f(x) = \dfrac{x^{-7} \cdot \mathrm{e}^{-4x}}{7\sinh(x)}$ $\quad (x \in \mathbb{R},\ x \neq 0)$

Aufgabe 8: (6)

Gegeben sei f durch $\quad f(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-0,5x}$.

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich an und diskutieren Sie die so erhaltene Funktion bzgl. Extrempunkten, Wendestellen sowie dem Verhalten im Unendlichen. Fertigen Sie anhand Ihrer Ergebnisse eine Skizze von f an.

[Kontrollergebnis: $f'(x) = \mathrm{e}^{-0,5x}(-0,5x^2 + 2x)$]

Aufgabe 9: (4)

Gesucht ist die Schnittstelle der Funktionen

$$g(x) = x^3 - 1 \quad \text{und} \quad h(x) = x \qquad \text{für} \quad x > 0\,.$$

Bestimmen Sie eine Näherung dieser Schnittstelle mit dem Tangentenverfahren von Newton. Geben Sie dazu zuerst die allgemeine Rekursionsformel an. Starten Sie dann die Iteration mit $x_0 = 1{,}5$ und geben Sie alle (Zwischen-) Ergebnisse auf 4 Nachkommastellen gerundet an. Auf wie viel Nachkommastellen genau ist die Schnittstelle nach drei Iterationsschritten berechnet? Geben Sie den entsprechenden Funktionswert $f(x) = g(x) - h(x)$ an.

Aufgabe 10: (5)

Lösen Sie folgende Integrale.

i) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot \sin(x^2 + \pi)\ \mathrm{d}x$

ii) $\displaystyle\int_{-2}^{0} 12x \cdot (x + 2021)^5\ \mathrm{d}x$

iii) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t^2 + t}{2t}\ \mathrm{d}t$

Aufgabe 11: (4)

Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{4x^2 + 6x - 6}{(x+1)^2\,(x-3)}\ \mathrm{d}x\,.$$

Ergebnisse zur Klausur vom 4. August 2021

Aufgabe 1: $\frac{2x-2}{x} = \frac{x^2-1}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad x=1$ oder $x=2$

Aufgabe 2: $2\,|3+x| - 1 \geq |3x-6| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{5} \leq x \leq 11$

Aufgabe 3: Scheitelpunktform: $f(x) = \frac{1}{5}\left(x-(-2)\right)^2 - 2$

also: $a = \frac{1}{5}\,, \quad d=-2\,, \quad e=-2$

Vergleich: - nach oben geöffnet ($a>0$) und um dem Faktor $\frac{1}{5}$ gestaucht ($|a|<1$)

- um 2 Einheiten nach links verschoben ($d<0$)
- um 2 Einheiten nach unten verschoben ($e<0$)

Aufgabe 4: a) f ist punktsymmetrisch.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$ bzw. $f \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$

Aufgabe 5: Definitionsbereich:

$D_f = \{x \in \mathbb{R}\,|\, x \neq -20,\ x \neq 1,\ x \neq 15\}$

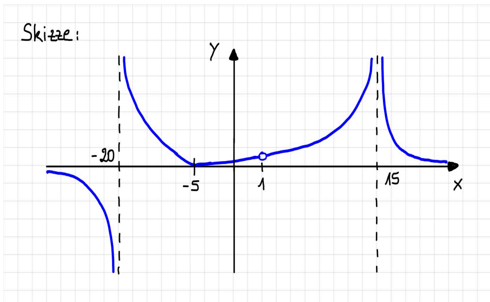
Art der Definitionslücken:

$x=-20$: Polstelle mit VZW

$x=15$: Polstelle ohne VZW

$x=1$: hebbare Lücke mit

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) \approx 0{,}0087$

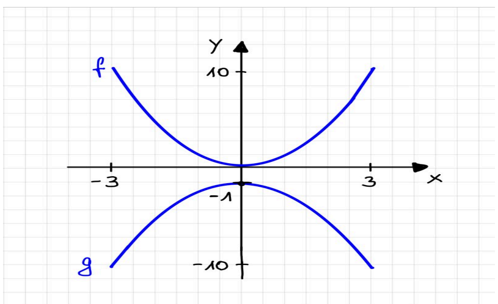


Art der Nullstellen: $x=-5$ ohne VZW

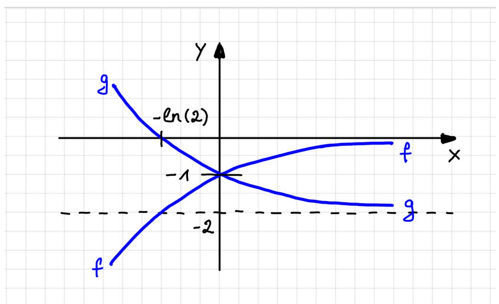
Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0^{\pm}$

Aufgabe 6:

a)



b)



Ergebnisse zur Klausur vom 4. August 2021: Fortsetzung

Aufgabe 7:

i) $f'(x) = -\frac{8}{x} \cdot \sin\left(4\ln(x^2)\right)$

ii) $f'(t) = \sin(x) \cdot 9t^2 \cdot \mathrm{e}^{-3t}\,(t-1)$

iii) $$f'(x) = \frac{x^{-7} \cdot \mathrm{e}^{-4x}\Big((-7x^{-7} - 4) \cdot \sinh(x) - \cosh(x)\Big)}{7\,\sinh^2(x)}$$

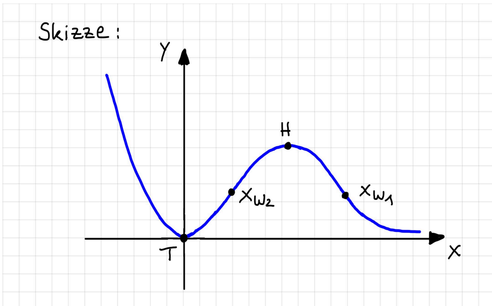
Aufgabe 8: Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R}$

Extrempunkte:
$T(0|0), H(4|2,165)$

Wendestellen:
$x_{W_1} = 1,172,\ x_{W_2} = 6,828$

Verhalten im Unendlichen:
$f(x) \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$



Aufgabe 9: Mit $f(x) = x^3 - 1 - x$, $x_0 = 1,5$ und einer Berechnung mit 4 Nachkommastellen ergibt sich nach 3 Iterationschritten $f(x_3) = f(1,3247) = -0,0001$ und damit eine Genauigkeit der Schnittstelle bis auf 3 Nachkommastellen.

Aufgabe 10:

i) $$\int_0^{\pi} x \cdot \sin(x^2 + \pi)\ \mathrm{d}x = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2}\sin(u)\ \mathrm{d}u = -1$$

ii) $$\int_{-2}^{0} 12x \cdot (x + 2021)^5\ \mathrm{d}x = -8,065 \cdot 10^{17}$$

iii) $$\int_0^1 \frac{t^2 + t}{2t}\ \mathrm{d}t = \frac{3}{4}$$

Aufgabe 11:

$$\int \frac{4x^2 + 6x - 6}{(x+1)^2\,(x-3)}\ \mathrm{d}x = \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{3}{x-3}\right)\ \mathrm{d}x$$

$$= -\ln|x+1| - 2(x+1)^{-1} + 3\ln|x-3| + c\,, \quad (c \in \mathbb{R})$$

Stand: 6.06.2024