Fachbereich Bauingenieurwesen

Mathematik 2 für Bauingenieure

Prof. Dr.-Ing. P. Sparla

Formelblatt zur Mathematik 2

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Bogenlänge : $s = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx$

Mantelfläche : $M_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx$ bzw. $M_y = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1+[g'(y)]^2}\ dy$

Massenträgheitsmoment : $J_x = \frac{1}{2}\pi\rho \int_a^b f^4(x)\ dx$ bzw. $J_y = \frac{1}{2}\pi\rho \int_c^d g^4(y)\ dy$

Rotationsvolumen : $V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\ dx$ bzw. $V_y = \pi \int_c^d g^2(y)\ dy$

Schwerpunkt $S(x_s|y_s)$ einer ebenen Fläche zwischen den Funktionen f und h mit $f \geq h$:

$$x_s = \frac{1}{A}\int_a^b x\,[f(x)-h(x)]\ dx \quad , \qquad y_s = \frac{1}{2A}\int_a^b \left[f^2(x)-h^2(x)\right]\ dx$$

Schwerpunkt $S(x_s|y_s|z_s)$ eines Rotationskörpers K_x : $x_s = \frac{\pi}{V_x}\int_a^b x\cdot f^2(x)\ dx \ , \quad y_s = z_s = 0$

Schwerpunkt $S(x_s|y_s|z_s)$ eines Rotationskörpers K_y : $y_s = \frac{\pi}{V_y}\int_c^d y\cdot g^2(y)\ dy \ , \quad x_s = z_s = 0$

Erläuterungen:

- Die jeweilige Rotationsachse wird durch den Index x bzw. y gekennzeichnet (siehe z.B. V_x bzw. V_y).
- $g(y)$ bezeichnet die Umkehrfunktion zu $f(x)$.
- A bezeichnet den entsprechenden Flächeninhalt.
- ρ steht für die Dichte.

Inverse einer Matrix A mittels der Adjunkten:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\cdot C^T \quad \text{, wobei} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij}) \ ,$$

und die Matrix A_{ij} aus der Matrix A durch Streichung der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Cramersche Regel:

Ist das Gleichungssystem $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\, \overrightarrow{a_1} \mid \overrightarrow{a_2} \mid \cdots \mid \overrightarrow{a_n} \,) \,, \ \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

und gilt $\det(A) \neq 0$, so erhält man die Komponenten x_i des Lösungsvektors durch:

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det\left(\overrightarrow{a_1} \mid \cdots \mid \overrightarrow{a_{i-1}} \mid \overrightarrow{b} \mid \overrightarrow{a_{i+1}} \mid \cdots \mid \overrightarrow{a_n} \right) .$$

Relative Extrema von Funktionen mehrerer Veränderlicher:

Seien f eine reelle Funktion mit zwei Veränderlichen (also $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) und $\overrightarrow{k_i}$ mit $i = 1, \cdots, n$ ihre kritischen Stellen, so gilt:

- Ist $\Delta(\overrightarrow{k_i}) = f_{xx}(\overrightarrow{k_i}) \cdot f_{yy}(\overrightarrow{k_i}) - f_{xy}^2(\overrightarrow{k_i}) < 0$, so hat f an der Stelle $\overrightarrow{k_i}$ einen Sattelpunkt.
- Ist $\Delta(\overrightarrow{k_i}) = f_{xx}(\overrightarrow{k_i}) \cdot f_{yy}(\overrightarrow{k_i}) - f_{xy}^2(\overrightarrow{k_i}) > 0$, so hat f an der Stelle $\overrightarrow{k_i}$ ein relatives Extremum und es gilt außerdem:

  Ist $f_{xx}(\overrightarrow{k_i}) > 0$, so handelt es sich hierbei um ein relatives Minimum,
  ist $f_{xx}(\overrightarrow{k_i}) < 0$, so handelt es sich hierbei um ein relatives Maximum.

(Im Fall $\Delta(\overrightarrow{k_i}) = 0$ kann mit dieser Methode keine Aussage getroffen werden.)

Differentialgleichungen 1. Ordnung:

Grundtypen:

Bezeichnung	Allgemeine Form	Lösung
Trennbarer Typ (T)	$y' = f(x) \cdot g(y)$	$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{dy} = \int f(x)\,\mathrm{dx} + C$ für $g(y) \neq 0$ und $y = \tilde{C}$ für $g(y) = 0$
Lineare DGL, inhomogen	$y' = f(x) \cdot y + g(x)$	$y = \left(\int g(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{dx}}\,\mathrm{dx} + C \right) \cdot \mathrm{e}^{\int f(x)\,\mathrm{dx}}$

Auf Grundtypen zurückführbar:

Bezeichnung	Allgemeine Form	Lösung
Gleichgradige DGL	$y' = f(\frac{y}{x})$	$u = \frac{y}{x} \ \to \ u' = \frac{f(u)-u}{x}$, (T)
-	$y' = f(ax+by+c)$	$u = ax+by+c \ \to \ u' = a+bf(u)$, (T)