Matrix Theorie

Achtung!

Dieses Folienskript soll den Studierenden einiges an mechanischer Schreibarbeit abnehmen und dazu beitragen, sich auf das eigentliche Fach und seine vielfältigen Themen konzentrieren zu können.

Es ersetzt keinesfalls eigene, ergänzende Notizen und Aufzeichnungen zu den Lehrinhalten, die während der Vorlesungen vermittelt werden.

Dieses Skript stellt kein Lehrbuch dar!
Nicht alles, was in der Vorlesung erarbeitet wird, ist im Skript enthalten.

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Matrizen und Vektoren

- Eine (m x n)-Matrix **A** ist ein System vom *Elementen* a_{ij} , die in m *Zeilen* und n *Spalten* angeordnet sind

$$A = \underset{(m,n)}{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- (m x n) heißt *Ordnung*, *Typ* oder *Dimension* der Matrix **A**

Matrizen und Vektoren

- **Rechteckmatrix:** $m \neq n$

Beispiel:

$$\underset{(3,4)}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \\ 6 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizen und Vektoren

- **Quadratische Matrix:** $m = n$

Beispiel:

$$\underset{(3,3)}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrizen und Vektoren

- **Skalar:** $m = n = 1$

Beispiel:

$$\underset{(1,1)}{A} = \begin{bmatrix} 7 \end{bmatrix}$$

Transponierte Matrix A^T

- durch „hochgestelltes T“ (^{T}) gekennzeichnet
- entsteht durch Vertauschen der Zeilen und Spalten der Matrix **A** (Kippen um die Diagonale)
- Es gibt auch andere Schreibweisen, z.B. die Kennzeichnung durch (´) gerade in älterer Literatur: **A**´

Transponierte Matrix A^T

- **Transponieren einer quadratischen Matrix**

$$\underset{(3,3)}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \underset{(3,3)}{A^T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & -1 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Transponierte Matrix A^T

- **Transponieren einer rechteckigen Matrix**

$$\underset{(3,2)}{B} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 0 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \underset{(2,3)}{B^T} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 5 \\ 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen

- **Symmetrische Matrix:** Quadratische Matrix mit

$$a_{ij} = a_{ji} \quad a_{ii} = \text{beliebig}$$

$$A = A^T$$

Beispiel:

$$\underset{(3,3)}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \underset{(3,3)}{A^T}$$

Symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen

- **Schiefsymmetrische Matrix:** Quadratische Matrix mit

$$a_{ij} = -a_{ji} \qquad a_{ii} = 0$$

$$A = -A^T$$

- Beispiel:

$$\underset{(3,3)}{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = -\underset{(3,3)}{A^T}$$

Spalten- und Zeilenvektor

- **Spaltenvektor** – einspaltige Matrix $\underset{(m,1)}{A}$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

- **Zeilenvektor** – einzeilige Matrix $\underset{(1,n)}{A}$

$$a' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}'$$

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Diagonalmatrix D

- Quadratische Matrix, deren Elemente außerhalb der Diagonalen Null sind.

$$D = diag\ (d_{11},\quad d_{22},\quad \cdots,\quad d_{nn}) = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix} \quad d_{ij} = 0 \text{ für alle } i \neq j$$

- Beispiel

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Einheitsvektor

- Einheitsvektoren haben die Länge 1, d.h. die Summe ihrer quadrierten Elemente ist gleich 1

$$e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- spezielle Einheitsvektoren sind die k-ten Einheitsvektoren e_k – k-tes Element gleich 1 und alle übrigen gleich 0

Einheitsvektor

- Beispiel: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$$a_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Einheits- oder Identitätsmatrix I

- Diagonalmatrix, deren Elemente 1 sind
- sie kann als System von *n* Spaltenvektoren e_k mit ($k = 1, ..., n$) aufgefasst werden.

$$\underset{(n,n)}{I} = (e_1, e_{2,} \cdots, e_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$

$a_{ij} = 1$ für alle $i = j$

Einsvektor, Summationsvektor

- alle Elemente $a_i = 1$ d.h. kein Einheitsvektor

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Zeilensumme - $A \cdot e$
- Spaltensumme - $e \cdot B$

Skalarmatrix

- Diagonalmatrix mit gleichen Elementen

$$A = a \cdot I = \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = 0 \text{ für alle } i \neq j$$
$$a_{ij} = a \text{ für alle } i = j$$

Nullmatrix

- alle Elemente haben den Wert Null $a_{ij} = 0$

Dreiecksmatrix

- quadratische Matrix, deren Elemente oberhalb oder unterhalb der Hauptdiagonale gleich Null sind

- **Obere Dreiecksmatrix**

$$\underset{(n,n)}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \underline{0} & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Untere Dreiecksmatrix

$$\underset{(n,n)}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \underline{0} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Gleichheit und Addition

- zwei (m x n)-Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ heißen gleich, wenn sie elementeweise übereinstimmen, d.h.

$$\underset{(m,n)}{A} = \underset{(m,n)}{B} \quad \text{genau dann, wenn } a_{ij} = b_{ij} \text{ für alle } i \text{ und } j$$

- $A = A$ für alle A (Reflexiv-Gesetz)
- Wenn $A = B$ dann $B = A$ für alle A und B (Symmetrie-Gesetz)
- Wenn $A = B$, $B = C$ dann $A = C$ (Transitiv-Gesetz)

Gleichheit und Addition

- zwei (m x n)-Matrizen $A=(a_{ij})$ und $B=(b_{ij})$ werden elementeweise addiert bzw. subtrahiert

$$\underset{(m,n)}{A} \pm \underset{(m,n)}{B} = \underset{(m,n)}{C}$$

$$a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij} \quad \text{für alle } i \text{ und } j$$

$$A+B=B+A=C$$ (Kommutativ-Gesetz)

$$A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C$$ (Assoziativ-Gesetz)

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Addition zweier Matrizen

- Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 4+9 \\ 2+5 & 7+1 \\ -1+3 & 5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 13 \\ 7 & 8 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Skalare Multiplikation

- $B = cA$, d.h. $(b_{ij}) = (c \cdot a_{ij})$
- jedes Element von **A** wird mit einem *Skalar c* multipliziert
- Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = 3 \cdot A = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 3 & 3\cdot 5 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot -2 & 3\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 15 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Skalare Multiplikation - Regeln

$$c(A+B)=c(A)+c(B)$$

$$(c+d)A=cA+dA$$

$$c(AB)=(cA)B=A(cB)$$

$$c(dA)=(cd)A$$

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Matrizenmultiplikation

- Produkt zweier Matrizen $\underset{(m,n)}{C} = \underset{(m,k)}{A}\,\underset{(k,n)}{B}$
- Voraussetzung: Anzahl der Spalten von A = Anzahl der Zeilen von $B = k$

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir} b_{rj} \quad \text{für alle} \quad i = 1, \ldots, m \quad j = 1, \ldots, n$$

oder

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots a_{ik} b_{kj}$$

Matrizenmultiplikation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & & \boxed{c_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir} b_{rj}} & & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Produkt zweier Matrizen

- Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 1+4\cdot 7 & 1\cdot 1+2\cdot 0+4\cdot 4 \\ 5\cdot 2+(-1)\cdot 1+0\cdot 7 & 5\cdot 1+(-1)\cdot 0+0\cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 32 & 17 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Falksches Schema

$$\begin{array}{cccc|cc}
 & & & & 2 & 1 \\
\underset{(3,2)}{B} = & & & & 1 & 0 \\
 & & & & 7 & 4 \\ \hline
\underset{(2,3)}{A} = & 1 & 2 & 4 & 32 & 17 \\
 & 5 & -1 & 0 & 9 & 5
\end{array}$$

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Regeln

$$AI = IA = A$$

$$A(BC) = (AB)C = ABC$$ assoziativ

$$A(B+C) = AB + AC$$ distributiv

$$(A+B)C = AC + BC$$ distributiv

allgemein gilt: $AB \neq BA$ (nicht kommutativ!)

Beachte: $\underset{(m.n)}{A}\;\underset{(n.m)}{B} = \underset{(m.m)}{C}\,,\quad \underset{(n.m)}{B}\;\underset{(m.n)}{A} = \underset{(n.n)}{D}\,,\quad C \neq D$

Links-, Rechtsmultiplikation

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 32 & 17 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}, \; BA = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ 27 & 10 & 28 \end{pmatrix}$$

Nullmatrix als Produkt zweier Matrizen

- Ein Produkt *AB* kann die Nullmatrix *0* ergeben, ohne dass *A* oder *B* die Nullmatrix sind.
- Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -5 \\ 16 & 8 & 24 \\ 8 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Zeilen- und Spaltensumme

- **Zeilensumme**

$$Ae = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} \end{pmatrix}$$

- **Spaltensumme**

$$e'A = \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} \; \sum_{i=1}^{m} a_{i2} \; \cdots \sum_{i=1}^{m} a_{in} \right)$$

Skalarprodukte zweier Vektoren

- werden zwei Vektoren *a* und *b* mit gleicher Dimension *m* als $(m \times 1)$ - Matrizen aufgefasst, lässt sich ihr Skalarprodukt als Spezialfall der Matrizenmultiplikation auffassen

$$a'b = \begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \cdots, & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{m} a_i b_i = b'a$$

und

$$a'a = \sum_{i=1}^{m} a_i^2 \qquad b'b = \sum_{i=1}^{m} b_i^2$$

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Skalarprodukt zweier Vektoren

$$\underset{(3,1)}{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \underset{(3,1)}{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{(1,3)}{a'} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \underset{(1,3)}{b'} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$a'a = 14 \qquad b'b = 21 \qquad a'b = b'a = 0$$

Matrixoperationen mit einer Diagonalmatrix

- Multiplikation einer quadratischen Matrix $\underset{(m,m)}{A}$ mit der Diagonalmatrix $\underset{(m,m)}{D}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix}$$

$$DA = \begin{pmatrix} d_{11} \cdot a_{11} & d_{11} \cdot a_{12} \\ d_{22} \cdot a_{21} & d_{22} \cdot a_{22} \end{pmatrix}$$ jede Zeile A_i wird mit d_{ii} multipliziert

$$AD = \begin{pmatrix} d_{11} \cdot a_{11} & d_{22} \cdot a_{12} \\ d_{11} \cdot a_{21} & d_{22} \cdot a_{22} \end{pmatrix}$$ jede Spalte A_j wird mit d_{jj} multipliziert

Diagonalmatrix *D* mit rationalem Exponenten

- für eine Diagonalmatrix mit $d_{ii} \geq 0$ positiven Elementen und Skalar $f > 0$ existiert die Matrix

$$\underset{n,n}{D^f} = \begin{pmatrix} d_{11}^f & & & \\ & d_{22}^f & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{nn}^f \end{pmatrix}$$

- Sei $f > 0$ und $g > 0$, dann gilt: $D^f D^g = D^{(f+g)}$
- Speziell gilt: $D^{1/2} D^{1/2} = D$

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Rechenregeln für das Transponieren einer Matrix

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(ABC)^T = C^T B^T A^T$$

$$(cA)^T = cA^T \quad \text{mit Skalar } c$$

$$(A^T)^T = A$$

$$I^T = I$$

D diagonal: $D^T = D$

A symmetrisch: $A^T = A$

Rechenregeln für das Transponieren einer Matrix

- Sei $\underset{(n,u)}{A}$ beliebig, $\underset{(n,n)}{B}$ symmetrisch, dann gilt:

  $$AA^T, A^T A, A^T BA$$

  sind symmetrisch:

$$AA^T = C \;\; ; \quad C^T = (AA^T)^T = AA^T = C \text{q.e.d.}$$

$$\underset{(u,u)}{C} = \underset{(u,n)}{A^T} \; \underset{(n,n)}{B} \; \underset{(n,u)}{A} \;\; ; \quad C' = (A^T BA)^T = A^T B^T A = A^T BA = C$$

Determinanten

- für jede quadratische *(n,n)* - Matrix A lässt sich eine eindeutige Zahl angeben
- wird mit $\det A$ oder $|A|$ bezeichnet
- $\underset{(1,1)}{A}$; $det\,A = a_{11}$
- $\underset{(2,2)}{A}$; $det\,A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$
- $\underset{(3,3)}{A}$; $det\,A$ Berechnung z.B. mit der Regel von Sarrus
- $\underset{(n,n)}{A}$; $det\,A$ Berechnung mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatz

Determinanten einer (3x3) Matrix
Regel von Sarrus

$$\underset{(3,3)}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccc|cc} & + & + & + & & \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & - & - & - & & \end{array}$$

$$\det(\underline{\underline{A}}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Determinanten einer allgemeinen (nxn) Matrix: Laplacscher Entwicklungssatz

Es gilt:

$$\det(A) = a_{11}, \quad \textit{für} \quad n = 1$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+l} a_{kl} \cdot \det(A_{kl}), \quad \textit{für} \quad n > 1$$

- Dabei kann der Index l aus den Werten 1 bis n beliebig gewählt werden!
- Der Index l legt fest, dass alle a_{kl} aus der l-ten Spalte von A stammen:

  <u>Die Determinante wird nach der l-ten Spalte entwickelt.</u>

- A_{kl} ist die so genannte Streichungs-Matrix, die sich ergibt, wenn von A die k-te Zeile und l–te Spalte gestrichen wird.

Determinanten einer allgemeinen (nxn) Matrix: Laplacscher Entwicklungssatz

Determinanten können auch nach der *k*-ten Zeile entwickelt werden! Es gilt dann:

$$\det(A) = a_{11}, \quad \textit{für} \quad n = 1$$

$$\det(A) = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+k} a_{kl} \cdot \det(A_{kl}), \quad \textit{für} \quad n > 1$$

Determinanten

- Zu jedem Element a_{ij} gibt es eine Subdeterminante (Minor) m_{ij} durch das Streichen der *i-ten* Zeile und *j-ten* Spalte.

Beispiel:

$$m_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{23}$$

- Es gilt $m_{ij} = det\, A_{ij}$

Eigenschaften von Determinanten

1. Dreiecksmatrix A : $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$

Diagonalmatrix D: $\det D = d_{11} \cdot d_{22} \cdot d_{33} \cdots d_{nn}$

Die Determinante einer Dreiecks- oder Diagonalmatrix ist gleich dem Produkt ihrer Diagonalelemente.

Bemerkung:

Aus Dreiecksmatrix A : $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$

ergibt sich eine weitere Möglichkeit die Determinante eine Matrix A zu berechnen:

1.) Matrix mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus in Dreiecksform bringen.

2.) *det*(A) ist nun das Produkt der Elemente auf der Diagonalen der durch den Gaußschen Algorithmus umgeformten Matrix

Eigenschaften von Determinanten

2. $\det(A_1 \cdot A_2 \cdots A_k) = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \det A_3 \cdots \det A_k$

Die Determinante des Produktes von *k* Matrizen ist gleich dem Produkt der Determinanten der Matrizen.

Eigenschaften von Determinanten

3. $\det A = 0$, wenn $A = (a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n)$ mit $a_j = 0$

Die Determinante einer Matrix mit einem Nullvektor ist Null.

Eigenschaften von Determinanten

4. $\det A = 0$, wenn $A = (a_1, \ldots, a_i, a_j, \ldots, a_n)$ mit $a_i = a_j$ bzw.

$$a_i = c \cdot a_j$$

Eine Determinante ist gleich Null, wenn zwei Spalten (Zeilen) identisch sind bzw. wenn eine Spalte (Zeile) das Vielfache einer anderen Spalte (Zeile) ist.

Eigenschaften von Determinanten

5. $\det A = \det A^T$

Eine Determinante ändert sich nicht, wenn Zeilen und Spalten miteinander vertauscht werden.

Eigenschaften von Determinanten

6. $\det A = \det \overline{A}$, wenn $A = (a_1, \ldots, a_n)$, $\overline{A} = (\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n)$ mit

   $\overline{a}_j = a_j + c a_i$

   Eine Determinante ändert sich nicht, wenn zu einer Spalte (Zeile) das Vielfache einer anderen Spalte (Zeile) addiert wird.

Eigenschaften von Determinanten

7. $\det A = -\det \overline{A}$, wenn

$$A = (a_1, \ldots, a_i, a_j, \ldots a_n),\ \overline{A} = (a_1, \ldots, a_i, a_j, \ldots a_n)$$

Eine Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn zwei Spalten (Zeilen) miteinander vertauscht werden.

Eigenschaften von Determinanten

8. $c \cdot \det A = \det(a_1, \ldots, c \cdot a_j, \ldots, a_n)$

Eine Determinante wird mit einem Skalar c = const. multipliziert, indem eine fest gewählte Spalte (Zeile) mit dieser Zahl multipliziert wird.

Definition und Rechenregeln

- Division von Matrizen ist nicht definiert
- Es kann gelten $AB = AC$ mit $B \neq C$
- Dies schließt die „Division“ durch A aus, auch wenn $A \neq 0$

Gleiches Matrizenprodukt trotz ungleicher Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

- obwohl offensichtlich $B \neq C$, ergibt sich $AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = AC$

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Matrixinversion

$$A^{-1}$$

$$A \cdot A^{-1} = I \qquad A^{-1} \cdot A = I$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

$$D^{-1} = diag \cdot \left(\frac{1}{d_{11}}, \frac{1}{d_{22}}, \ldots \right)$$

$$D^{-\frac{1}{2}} = \left(D^{-1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Determinantenformel für die Inversion

- Kofaktormatrix C der Matrix A
- quadratischen Matrix - jedes Element a_{ij} wird durch seinen Kofaktor ersetzt $c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Adjungierte Matrix

- zu A adjungierte Matrix adj$A$ ist die Transponierte C^T von C

$$adjA = C^T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Matrix A, Kofaktormatrix von A

- Matrix A

$$\underset{(3,3)}{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Kofaktormatrix von A

$$C = \begin{pmatrix} +(-2) & -(-5) & +(+1) \\ -(+5) & +(+5) & -(-5) \\ +(+4) & -(+5) & +(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -5 & 5 & 5 \\ 4 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

zu A adjungierte Matrix, Determinante von A

- zu A adjungierte Matrix

$$adjA = C^T = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 5 & 5 & -5 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

- Determinante von A

$$\det A = 5 = \sum_{j=1}^{m} a_{kj} \cdot c_{kj}$$

Inverse von A

- Inverse von **A**

$$A^{-1} = \frac{C^T}{\det A} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 5 & 5 & -5 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Lineare Abhängigkeit von Vektoren

- ein Vektor *b* wird *Linearkombination* der Vektoren $a_1, a_2, \ldots, a_m$ genannt, wenn es Skalare (reelle Zahlen) $c_1, c_2, \ldots, c_m$ gibt, mit denen gilt:

$$b = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_m a_m = \sum_{i=1}^{m} c_i a_i$$

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Falls nicht alle $c_i = 0$ sind und sich statt des Vektors der Nullvektor ergibt,

$$0 = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_m a_m = \sum_{i=1}^{m} c_i a_i$$

heißen die Vektoren a_i linear abhängig. Andernfalls, wenn sich der Nullvektor nur erzeugen lässt, wenn für alle $c_i = 0$ gilt, sind die Vektoren a_i linear unabhängig.

Rang einer Matrix

- maximale Anzahl der linear unabhängigen Vektoren eines Vektorsystems

$$rg(A) = r \leq \min\,(m, n)$$

- falls $r = m$ gilt, besitzt die Matrix vollen **Zeilenrang**
- falls $r = n$ gilt, besitzt die Matrix vollen **Spaltenrang**

Rangdefekt

- gilt $r < \min\,(m,n)$, weist die $(m \times n)$–Matrix einen *Rangdefekt d* auf

$$d = \min\,((m-r),(n-r))$$

- Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \\ 5 & 7 & 14 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad r = 2\,, \quad d = 3 - 2 = 1$$

Reguläre und singuläre Matrix

- besitzt die quadratische Matrix **vollen Rang** $(\, rg(A) = r \leq m)$, wird sie **regulär** genannt
- Regulär ist die Matrix genau dann, wenn $\det A \neq 0$ und genau dann ist die Matrix **A** invertierbar

- besitzt die quadratische Matrix **keinen vollen Rang** $(\, rg(A) = r < m)$, wird sie **singulär** genannt
- eine singuläre Matrix ist nicht invertierbar, es existiert keine Inverse A^{-1}

Rechenregeln zur Rangbestimmung einer Matrix

$$rg(A) = rg(A')$$

$$rg(ABC\ldots) \leq \min\,[rg(A), rg(B), rg(C), \ldots]$$

$$rg(AA') = rg(A) = rg(AA')$$

$$rg(BA) = rg(A) = rg(AC)$$ für reguläre Matrizen **B** und **C**

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Lineare Gleichungssysteme

- ein lineares Gleichungssystem von *m* Gleichungen mit *n* Unbekannten

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots & = & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$