FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Fachbereich Bauingenieurwesen

Mathematik 2

Prof. Dr.-Ing. P. Sparla

8. Oktober 2018

Aufgabe 1: (5)

Für $x \in \mathbb{R}$ schließen die drei Funktionen $f, g,$ und h gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{x+2} \quad (x \neq -2)\,, \quad g(x) = (x+2)^2 \quad \text{und} \quad h(x) = -x + 2{,}25$$

mehrere Flächen ein. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die den Punkt $P(0|1)$ enthält und skizzieren Sie den Sachverhalt.

Aufgabe 2: (5)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}(1+x^2)$ für $x \in \left[0, \sqrt{10}\right]$. Durch Rotation von f um die y-Achse entsteht der Rotationskörper K_y. Berechnen Sie seine Mantelfäche M_y.

Aufgabe 3: (1)

Berechnen Sie das Spatprodukt der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: (4)

Gegeben seien die Ebenen E und H durch

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H: \quad \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 3\,.$$

Berechnen Sie die Schnittgerade der Ebenen sowie den Schnittwinkel.

Aufgabe 5: (5)

Gegeben seien die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 2x_3 &= -4 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 &= 6 \quad . \end{aligned}$$

a) Schreiben Sie die Gleichungen als Gleichungssystem in Matrizenform.

b) Überprüfen Sie die Lösbarkeit dieses Gleichungssystems durch Berechnung der entsprechenden Determinante.

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus den Lösungsvektor und prüfen Sie Ihr Ergebnis durch eine Probe.

d) Transponieren Sie die Koeffizientenmatrix aus Aufgabenteil a) und berechnen Sie das Produkt aus dieser Transponierten und der Koeffizientenmatrix selbst.

Aufgabe 6: (6)

Berechnen Sie die Kritischen Stellen der Funktion

$$f(x,y) = x^3 - 12x + 6xy^2 - 2y^3 \quad \text{für} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

Untersuchen Sie, ob es sich dabei um Sattel-, Minimal- oder Maximalstellen handelt und geben Sie die vollständigen Punkte an.

Aufgabe 7: (3)

Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung

$$(1+x^2) \cdot y' - \frac{cx}{y} = 0$$

mit $y \neq 0$ und $c \in \mathbb{R}$, konstant.

Aufgabe 8: (1)

Skizzieren Sie das Richtungsfeld (Isoklinen) der Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{y} \qquad \text{mit} \qquad y \neq 0 .$$

Ergebnisse der Klausur vom 8. Oktober 2018

Aufgabe 1: Die Fläche berechnet sich wie folgt:

$$A = \int_{-1}^{-0,38} \big(g(x) - f(x)\big)\mathrm{dx} + \int_{-0,38}^{2} \big(h(x) - f(x)\big)\mathrm{dx} \approx 3,13 \ [FE]$$

Aufgabe 2: Die gesuchte Mantelfläche hat eine Größe von $M_y \approx 55,15 \ [FE]$.
$\left(g(y) = \sqrt{3y-1}\right)$

Aufgabe 3: Spatprodukt: $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] = 5$.

Aufgabe 4: E und H schneiden sich unter einem Winkel von $\varphi \approx 147,7^\circ$ in der Geraden

$$g_S: \quad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}). \qquad (z.B.)$$

Aufgabe 5: a) Es gilt: $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b) $\det(A) = -16 \neq 0 \quad \Rightarrow$ Gleichungssystem lösbar.

c) Lösungsvektor: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (Probe: Überprüfe, ob $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ ergibt.)

d) $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ und $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 19 & -8 & -16 \\ -8 & 8 & 4 \\ -16 & 4 & 18 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6: f besitzt einen Tiefpunkt in $T(2|0|-16)$, einen Hochpunkt in $H(-2|0|16)$ sowie Sattelpunkte in $S_1\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{4}{3}\middle|-\frac{16}{3}\right)$ und $S_2\left(-\frac{2}{3}\middle|-\frac{4}{3}\middle|\frac{16}{3}\right)$.

Aufgabe 7: Die Lösungsgesamtheit der separablen Differentialgleichung lautet:

$$y(x) = \pm\sqrt{c_1 \cdot \ln(1+x^2) + c_2}$$

mit $x, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ so, dass $c_1 \cdot \ln(1+x^2) + c_2 \geq 0$.

Aufgabe 8: Die Skizze kann bei Frau Bauer eingesehen werden.

Stand: 26.07.2024