Fachbereich Bauingenieurwesen

Mathematik 2

Prof. Dr.-Ing. P. Sparla

7. Oktober 2019

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Aufgabe 1: (5)

Für $x \leq 0$ seien die Funktionen f, g, und h durch

$$f(x) = -x^2 + 1\,, \qquad g(x) = x - 1 \qquad \text{sowie} \qquad h(x) = \frac{1}{x+1} \text{ mit } x \neq -1$$

gegeben. Die so definierten Funktionen schließen in diesem Bereich zusammen mit der y-Achse eine Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche. Berechnen Sie dazu die Schnittstellen der Funktionen und skizzieren Sie den Sachverhalt.

Aufgabe 2: (5)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt{e^{3x} - 1}$ mit $x \in [0;1]$. Durch Rotation um die x-Achse entstehe ein Rotationskörper. Berechnen Sie den Schwerpunkt dieses Rotationskörpers K_x.

Aufgabe 3: (5)

a) Bestimmen Sie die Lage der Ebene E und Geraden g gegeben durch

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (\text{mit jeweils } \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}).$$

Berechnen Sie anschließend je nach Lage den Schnitt sowie den Schnttwinkel bzw. den Abstand von E und g.

b) Wie liegen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zueinander, wenn das Skalarprodukt der beiden den Wert Null ergibt? (Ohne Nachweis)

Aufgabe 4: (6)

Gegeben sei folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= -3 \\ -2x_1 + 2x_2 &= 2 \quad . \end{aligned}$$

a) Schreiben Sie das Gleichungssystem in Matrizenschreibeweise und bezeichnen Sie die Koeffizientenmatrix mit A .

b) Lösen Sie das Gleichungssystem mittels der Cramerschen Regel.

c) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0,5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

die Inverse zur Koeffizientenmatrix aus Aufgabenteil a) ist.

d) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil b), indem Sie die Lösung des Gleichungssystems auch mit Hilfe der Inversen berechnen.

Aufgabe 5: (5)

Berechnen Sie die Kritischen Stellen der Funktion

$$f(x,y) = x^2 - \frac{1}{2}x^2y + y^3 - 3y \quad \text{für} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

und untersuchen Sie, ob es sich dabei um Sattel-, Minimal- oder Maximalstellen handelt.

Aufgabe 6: (4)

Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung

$$y' - \frac{y}{x} = x \cdot \cos(x) \qquad \text{mit} \quad x > 0 \, .$$

Ergebnisse der Klausur vom 7. Oktober 2019

Aufgabe 1: Die Fläche berechnet sich wie folgt:

$$A = \int_{-1,62}^{-1,41} \Big(f(x) - h(x) \Big) \, \mathrm{dx} + \int_{-1,41}^{0} \Big(f(x) - g(x) \Big) \, \mathrm{dx} \approx 3,021 \ [FE]$$

Aufgabe 2: Der Schwerpunkt hat die Koordinaten $S(0,78|0|0)$.

Aufgabe 3:
a) E und g schneiden sich im Punkt $S(-1|-5|-4)$ unter einem Winkel von $\varphi \approx 9,26^\circ$.
b) $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ liegen senkrecht zueinander.

Aufgabe 4:
a) Es ist: $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Die Lösung lautet: $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) Zu zeigen: $A \cdot A^{-1} = I$

d) $\overrightarrow{x} = A^{-1} \cdot \overrightarrow{b}$

Aufgabe 5: f besitzt Sattelstellen in $\overrightarrow{k_2} = (0;-1)$, $\overrightarrow{k_3} = (\sqrt{18};2)$ und $\overrightarrow{k_4} = (-\sqrt{18};2)$ sowie eine Minimalstelle in $\overrightarrow{k_1} = (0;1)$.

Aufgabe 6: Die Lösungsgesamtheit der linearen inhomogenen Differentialgleichung lautet:

$$y(x) = \Big(\sin(x) + c \Big) \cdot x \qquad \text{mit} \quad x > 0,\ c \in \mathbb{R}.$$

Stand: 10.12.2019