Fachbereich Bauingenieurwesen

Mathematik 2

Prof. Dr.-Ing. P. Sparla
4. Februar 2019

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Aufgabe 1: (5)

Für $x \in \mathbb{R}$ und $x \geq 0$ schließen die drei Funktionen $f, g,$ und h gegeben durch

$$f(x) = 4 - x^2, \quad g(x) = e^x \quad \text{und} \quad h(x) = x^2$$

zusammen mit der y-Achse eine Fläche ein.

a) Weisen Sie nach, dass $x = 1{,}055$ eine ungefähre Schnittstelle der Funktionen f und g ist.

b) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Funktionen f und h.

c) Skizzieren Sie den oben beschriebenen Sachverhalt und berechnen Sie den Inhalt der angegebenen Fläche.

Aufgabe 2: (5)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$ für $x \in [0;2]$. Durch Rotation um die y-Achse entstehe der Körper K_y. Skizzieren Sie K_y und berechnen Sie das zugehörige Rotationsvolumen V_y.

Aufgabe 3: (1)

Berechnen Sie das Spatvolumen der Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: (1)

Gegeben sei die Ebenen E durch $\quad E: \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 3.$

Bestimmen Sie eine Parametergleichung dieser Ebene.

Aufgabe 5: (4)

a) Gegeben seien die Geraden g und h durch

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Überprüfen Sie die prinzipielle Lage der beiden Geraden und berechnen Sie je nach Ergebnis den Schnittpunkt oder den Abstand von g und h.

b) Nennen Sie eine Möglichkeit zur Feststellung, dass zwei Geraden windschief zueinander verlaufen.

Aufgabe 6: (4)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Weisen Sie die Existenz der inversen Matrix A^{-1} nach und berechnen Sie im Anschluss diese mit dem Gauß-Jordan-Verfahren.

Aufgabe 7: (6)

Berechnen Sie alle Kritischen Stellen der Funktion

$$f(x,y) = x^2 - x^2y^3 + 4y^3 \quad \text{für} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Untersuchen Sie, ob es sich dabei um Sattel-, Minimal- oder Maximalstellen handelt und geben Sie die vollständigen Punkte an.

Aufgabe 8: (4)

a) Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung

$$y' = \frac{1-x^2}{xy} \qquad \text{mit} \quad x, y \neq 0.$$

b) Zeigen Sie, dass $y = c \cdot \sin(x)$ eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' \cdot \tan(x) = y$ ist.
$\left(x \neq \frac{2k+1}{2}\pi \text{ und } k \in \mathbb{Z} \text{ sowie } c \in \mathbb{R} \text{ beliebig, aber fest} \right)$

Ergebnisse der Klausur vom 4. Februar 2019

Aufgabe 1:

a) $f(1{,}055) \approx 2{,}9 \approx g(1{,}055)$

b) Der gesuchte Schnittpunkt liegt in $S(\sqrt{2}|2)$.

c) Die Fläche berechnet sich wie folgt:

$$A = \int_0^{1{,}055} \big(g(x) - h(x)\big)\mathrm{dx} + \int_{1{,}055}^{\sqrt{2}} \big(f(x) - h(x)\big)\mathrm{dx} \approx 1{,}81 \;\; [FE]$$

Aufgabe 2: Das gesuchte Volumen beträgt $V_y \approx 8{,}83 \;\; [VE]$. $\left(g(y) = \frac{2}{y} + 3\right)$

Aufgabe 3: Das gesuchte Spatvolumen beträgt $V = \big|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\big| = 5 \;\; [VE]$.

Aufgabe 4:

$$E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}) \qquad (z.B.)$$

Aufgabe 5:

a) g und h schneiden sich im Punkt $S(3|-1|-2)$.

b) Man wählt 2 Punkte von jeder Geraden und zeigt, dass diese 4 Punkte nicht in derselben Ebene liegen. (z.B.)

Aufgabe 6:

1. Es gilt: $\det(A) = 4 \neq 0$, also existiert A^{-1}.

2. Die Inverse lautet: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0{,}25 & -0{,}25 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7: f besitzt Sattelpunkte in $S_{1/2}(\pm 2|1|4)$. Zum Kritischen Punkt $K(0|0|0)$ kann, mit unserem Verfahren, keine Aussage getroffen werden

Aufgabe 8:

a) Die Lösungsgesamtheit der separablen Differentialgleichung lautet:

$y(x) = \pm\sqrt{\ln(x^2) - x^2 + c}$ mit $\ln(x^2) - x^2 + c \geq 0$ für $x, c \in \mathbb{R}$.

b) —

Stand: 11.12.2019