

### 3. Übung

#### Aufgabe 11:

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion  $f$  für  $x \in \mathbb{R}$  und geben Sie  $f$ , falls möglich, als Linearfaktorzerlegung an. Untersuchen Sie  $f$  auf ihr Symmetrieverhalten und notieren Sie dazu vorab die Definitionen für Punktsymmetrie zum Nullpunkt bzw. Achsensymmetrie zur  $y$ -Achse.

- |  |   |                                 |
|--|---|---------------------------------|
| i) $f(x) = 2x - 6$                         | ii) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 12$       | iii) $f(x) = x^2 - \frac{4}{9}$ |
| iv) $f(x) = \frac{1}{7}x^2 + \frac{2}{7}x$ | v) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$                 | vi) $f(x) = x^3 - 3x$           |
| vii) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 3$          | viii) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 4x + 12$ | ix) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$     |

#### Aufgabe 12:

Berechnen Sie den gesuchten Grenzwert.

- |   |  |  |   |
|---|--|--|---|
| i) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2}{x^2-2}$ | ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x-1)^2}$ | iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{x^2-x}$ | iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{x^2-x}$ |
|---|--|--|---|

#### Aufgabe 13:

Bestimmen Sie die Grenzwerte der Abbildung  $f$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ .

- |   |   |
|---|---|
| i) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5$                                    | ii) $f(x) = \frac{3x^2-1}{x+1}, x \neq -1$                      |
| iii) $f(x) = \frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}, x \neq 0; -\frac{2}{3}$ | iv) $f(x) = \frac{-2x^2+2x+1}{-x^3+3x^2+x-3}, x \neq \pm 1; 3$  |
| v) $f(x) = -\frac{1}{2}x^5 + 7000x^4 - 23000x^2 + 12643$      | vi) $f(x) = \frac{-2x^4+2x^3+1}{x^3-3x^2-x+3}, x \neq \pm 1; 3$ |

#### Aufgabe 14:

Untersuchen Sie den Grenzwert der Abbildung  $f$  für  $x \rightarrow x_0$ . Was kann man über die stetige Ergänzbarkeit von  $f$  in  $x_0$  sagen?

- |  |  |
|--|--|
| i) $f(x) = \frac{3x^2-9x}{2x-6}, x \rightarrow 3$      | ii) $f(x) = \frac{x^4+x^3}{x^2+2x}, x \rightarrow 0$ |
| iii) $f(x) = \frac{5}{x^2+3x-10}, x \rightarrow -5$    | iv) $f(x) = \frac{x}{x^4+2x^3}, x \rightarrow 0$     |
| v) $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x^2+4x+4}, x \rightarrow -2$ | vi) $f(x) = \frac{4-x}{x^2-2}, x \rightarrow 4$      |

**Ergebnisse:**

- Aufgabe 11:**
- i)  $f(x) = 2(x-3)$  ; keine Symmetrie
  - ii)  $f(x) = \frac{1}{2}(x+6)(x+4)$  ; keine Symmetrie
  - iii)  $f(x) = (x + \frac{2}{3})(x - \frac{2}{3})$  ; achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse
  - iv)  $f(x) = \frac{1}{7}x(x+2)$  ; keine Symmetrie
  - v) Einzige Nullstelle bei  $x = 0$ , daher keine Darstellung als Linearfaktorzerlegung möglich ; keine Symmetrie
  - vi)  $f(x) = x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$  ; punktsymmetrisch zum Nullpunkt
  - vii)  $f(x) = -(x+1)(x-1)(x-3)$  ; keine Symmetrie
  - viii)  $f(x) = (x+2)(x+1)(x-1)(x-6)$  ; keine Symmetrie
  - ix)  $f(x) = (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$  ; achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse

Bemerkung: Die Nullstellen sind hier, aus Platzgründen, nur indirekt durch die Linearfaktoren angegeben. Im Normalfall müsste man diese, aufgrund der Aufgabenstellung, explizit angeben (siehe Praktikum).

- Aufgabe 12:**
- i)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2}{x^2-2} = 0$
  - ii)  $\frac{2}{(x-1)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \infty$
  - iii)  $\frac{-2}{x^2-x} \xrightarrow{x \uparrow 1} \infty$  und  $\frac{-2}{x^2-x} \xrightarrow{x \downarrow 1} -\infty$
  - iv)  $\frac{-2}{x^2-x} \xrightarrow{x \uparrow 0} -\infty$  und  $\frac{-2}{x^2-x} \xrightarrow{x \downarrow 0} \infty$

- Aufgabe 13:**
- i)  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$
  - ii)  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$
  - iii)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\frac{2}{3}$
  - iv)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0^\pm$
  - v)  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \mp\infty$
  - vi)  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \mp\infty$

- Aufgabe 14:**
- i)  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 3} \frac{9}{2}$ ,  $f$  ist in  $x_0 = 3$  durch  $f(3) = \frac{9}{2}$  stetig ergänzbar.
  - ii)  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ ,  $f$  ist in  $x_0 = 0$  durch  $f(0) = 0$  stetig ergänzbar.
  - iii)  $f(x) \xrightarrow{x \uparrow -5} \infty$ ,  $f(x) \xrightarrow{x \downarrow -5} -\infty$ ,  $f$  ist in  $x_0 = -5$  nicht stetig ergänzbar.
  - iv)  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty$ ,  $f$  ist in  $x_0 = 0$  nicht stetig ergänzbar.
  - v)  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -2} \infty$ ,  $f$  ist in  $x_0 = -2$  nicht stetig ergänzbar.
  - vi)  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 4} 0$  bzw.  $f(4) = 0$ ,  $f$  ist in  $x_0 = 4$  stetig.