Fachbereich Bauingenieurwesen
Übungen zur Mathematik 2

Prof. Dr.-Ing. P. Sparla
Dipl.-Math. M. Bauer

Sommersemester 2024
7.05.2024

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

4. Übung

Aufgabe 15:

Lässt sich der Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren

i) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 12 \end{pmatrix}$

schreiben?

Aufgabe 16:

Welchen Winkel schließen die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ miteinander ein?

i) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ ii) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 17:

Untersuchen Sie die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ auf Orthogonalität.

i) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ii) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$

Aufgabe 18:

Berechnen Sie die Projektion des Vektors $\vec{s}$ auf den Vektor $\vec{t}$.

i) $\vec{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{t} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ii) $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

Aufgabe 19:

a) Bestimmen Sie das Vektorprodukt $\vec{c}$ der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

i) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ ii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

iii) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}$ iv) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

b) Welchen Winkel schließen die Vektoren $\vec{c}$ aus a) (i), (ii) und (iii) mit den zugehörigen Vektoren $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ ein?

Aufgabe 20:

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ spannen ein Parallelogramm auf. Bestimmen Sie dessen Flächeninhalt.

b) Alle drei Vektoren spannen zusammen einen Spat auf. Berechnen Sie sein Volumen.

c) Warum ist das Ergebnis in Aufgabe 19 a) (iv) der Nullvektor?

Ergebnisse

Aufgabe 15: i) Ja, denn $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. ii) Nein.

iii) Ja, denn $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} -1 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 16: i) $\varphi \approx 70{,}5^\circ$ ii) $\varphi \approx 90^\circ$

Aufgabe 17: i) $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind orthogonal. ii) $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind nicht orthogonal.

Aufgabe 18: i) $\vec{s_t} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ ii) $\vec{s_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 19: a) i) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix}$ ii) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ iii) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 42 \\ 16 \\ 6 \end{pmatrix}$ iv) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Das Vektorprodukt steht senkrecht auf den beiden erzeugenden Vektoren.

Aufgabe 20: a) Der Flächeninhalt beträgt $A = 7\,[FE]$.
b) Das Volumen beträgt $V = 7\,[VE]$.
c) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beschreiben den „gleichen“ Vektor, sie sind nur unterschiedlich lang und verlaufen in entgegengesetzter Richtung. Ein Parallelogramm kann nicht von nur einem Vektor aufgespannt werden, daher ergibt sich der Flächeninhalt $A = 0$.