Fachbereich Bauingenieurwesen
Übungen zur Mathematik 2

Prof. Dr.-Ing. P. Sparla
Dipl.-Math. M. Bauer

Sommersemester 2024
21.05.2024

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

6. Übung

Aufgabe 25:

Gegeben seien die Punkte $A(-1|0|2)$, $B(1|2|3)$, $C(0|2|2)$ und $P(2|0|-1)$.

a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C nicht auf einer Geraden liegen.

b) Die Punkte A, B und C liegen in einer Ebene. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Ebene E in Parameterform. Geben Sie die Gleichung von E auch in parameterfreier Form bzw. Normalform an.

c) Bestimmen Sie den Abstand zwischen dem Punkt P und der Ebene E.

Aufgabe 26:

Gegeben seien die Ebene $E : \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 11$ sowie, für jeweils $\lambda \in \mathbb{R}$, die Geraden

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; g_4 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$g_5 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_6 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Welche Lagebeziehung haben die Geraden zur Ebene E? Bestimmen Sie, je nach Lage, Schnittpunkt und Schnittwinkel bzw. den Abstand zwischen Gerade und Ebene.

Aufgabe 27:

Wie liegen die Ebenen E_1, E_2 und E_3 mit $E_1 : \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} = 26$, $E_2 : \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix} = 12$

und $E_3 : \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$ zur Ebene $H : \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = 13$?

Überprüfen Sie die prinzipielle Lage und berechnen Sie im Anschluss den Abstand der parallelen, sowie das Schnittgebilde und den Schnittwinkel der sich schneidenden Ebenen.

Ergebnisse

Aufgabe 25:

a) —

b) Parameterform: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

parameterfreie Form: $\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$

c) $d = 4$

Aufgabe 26:

1. g_1 und E schneiden sich im Punkt $S(11|5|4)$ unter einem Winkel von $\varphi \approx 20{,}9$.
2. g_2 liegt in E.
3. g_3 verläuft mit Abstand $d = \sqrt{\frac{2}{7}}$ parallel zu E.
4. g_4 liegt in E.
5. g_5 verläuft mit Abstand $d = \frac{1}{\sqrt{14}}$ parallel zu E.
6. g_6 und E schneiden sich im Punkt $S(-4|-5|4)$ unter einem Winkel von $\varphi \approx 40{,}0$.

Aufgabe 36:

1. E_1 und H beschreiben dieselbe Ebene.
2. E_2 liegt parallel zu H, der Abstand beträgt $d = \frac{17}{\sqrt{30}} \approx 3{,}104\ [LE]$.
3. E_3 und H schneiden sich unter einem Winkel von $\varphi \approx 76{,}5^\circ$

   in der Geraden $g_S: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 27 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$.