Fachbereich Bauingenieurwesen
Übungen zur Mathematik 2

Prof. Dr.-Ing. P. Sparla
Dipl.-Math. M. Bauer

Sommersemester 2024
4.06.2024

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

7. Übung

Aufgabe 28:

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Welche der Matrizen lassen sich subtrahieren bzw. addieren? Berechnen Sie alle möglichen Differenzen und Summen.

b) Welche der Matrizen können miteinander multipliziert werden? Berechnen Sie alle möglichen Produkte.
Wann lassen sich Matrizen quadrieren?

c) Bestimmen Sie zu jeder Matrix M die zugehörige transponierte Matrix M^T sowie das Matrixprodukt MM^T. Welche Form hat die Produktmatrix?

Aufgabe 29:

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 105 & 87 \\ 0 & 2 & -317 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A sowie der Matrix $3A$. Wie wirkt sich die Multiplikation der Matrix auf die Determinante aus?

b) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix B sowohl mittels der Regel von Sarrus als auch durch Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte.

c) Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen C und D.

Aufgabe 30:

Man bestimme, falls möglich, die Inversen der folgenden Matrizen sowohl mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus als auch mittels der Adjunkten.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnisse

Aufgabe 28:

a) $A-B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}, \; B-A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \; A+B = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = B+A$

b) $AB = \begin{pmatrix} -2 & -16 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \; AD = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 12 \\ 4 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \; BA = \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}, \; BD = \begin{pmatrix} -13 & -14 & 6 \\ 15 & 22 & 15 \end{pmatrix}$

$CA = \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ 2 & 0 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}, \; CB = \begin{pmatrix} 23 & -6 \\ 12 & 1 \\ -25 & -10 \end{pmatrix}, \; CD = \begin{pmatrix} 19 & 26 & 12 \\ 11 & 14 & 3 \\ -25 & -30 & 0 \end{pmatrix}, \; DC = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 26 & 27 \end{pmatrix}$

c) $AA^T = A \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}, \; BB^T = B \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 29 \end{pmatrix},$

$CC^T = C \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 10 & -15 \\ 10 & 5 & -10 \\ -15 & -10 & 25 \end{pmatrix}, \; DD^T = D \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 17 \\ 17 & 61 \end{pmatrix}$

Aufgabe 29:

a) $\det(A) = 11, \quad \det(3A) = 99$

(Für eine $(n \times n)$-Matrix gilt: $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$.)

b) $\det(B) = -16$

c) $\det(C) = 24, \quad \det(D) = 85$

Aufgabe 30:

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 19 & -8 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

C^{-1} existiert nicht, da $\det(C) = 0$.