Fachbereich Bauingenieurwesen
Übungen zur Mathematik 2

Prof. Dr.-Ing. P. Sparla
Dipl.-Math. M. Bauer

Sommersemester 2024
25.06.2024

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

9. Übung

Aufgabe 35:

Bestimmen Sie alle Kritischen Stellen der Funktion f mit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und überprüfen Sie, ob es sich um relative Minimal-, Maximal- oder Sattelpunkte handelt.

i) $f(x,y) = x^2y^2 - 4x^2 - y^2 + 4$

ii) $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - x^2 - 4y^2$

iii) $f(x,y) = 12x^2 - 3xy^2 + 3y^2$

Aufgabe 36:

Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheiten der nachfolgenden separablen Differentialgleichungen.

i) $y' = 6xy^3$ ii) $y' = -\dfrac{x^2}{y^3}\,, \quad y \neq 0$ iii) $y' = \dfrac{y^4}{x}\,, \quad x \neq 0$

Aufgabe 37:

Berechnen Sie alle Lösungen der nachfolgenden linearen, inhomogenen Differentialgleichungen.

i) $y' = -\dfrac{1}{x}y + \dfrac{1}{x^2}\,, \quad x \neq 0$ ii) $y' = xy + 2x$

Aufgabe 38:

Setzen Sie in den Differentialgleichungen der Aufgabe 37 die Störfunktion zu Null und berechnen Sie die Lösungen, der so erhaltenen linearen, homogenen Differentialgleichungen auf zwei verschiedene Arten.

Aufgabe 39:

Gegeben sei eine Differentialgleichung der Form $y' = f(\frac{y}{x})$. Bestimmen Sie alle Lösungen.

i) $y' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y^2}{x^2} + 1\right)\,, \quad x \neq 0$ ii) $y' = \dfrac{y^2+xy-4x^2}{x^2}\,, \quad x \neq 0$

Aufgabe 40:

a) Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung
$y' = \dfrac{1-x^2}{xy}$ mit $x, y \neq 0$.

b) Zeigen Sie, dass $y = c \cdot \sin(x)$ $(c \in \mathbb{R}$ konstant) eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' \cdot \tan(x) = y$ ist.

Ergebnisse

Aufgabe 35:

i) Sattelpunkte: $S_1(1|2|0)$, $S_2(1|-2|0)$, $S_3(-1|2|0)$ $S_4(-1|-2|0)$
relatives Maximum: $H(0|0|4)$

ii) Sattelpunkte: $S_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\middle|0\middle|-\frac{1}{4}\right)$, $S_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\middle|0\middle|-\frac{1}{4}\right)$
relatives Maximum: $H(0|0|0)$
relative Minima: $T_1(0|\sqrt{2}|-4)$, $T_2(0|-\sqrt{2}|-4)$

iii) Sattelpunkte: $S_1(1|\sqrt{8}|12)$, $S_2(1|-\sqrt{8}|12)$
relatives Minimum: $T(0|0|0)$

Aufgabe 36:

i) $$y(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in \mathbb{R} \\ \pm\sqrt{\dfrac{1}{-2(3x^2+C)}} & , \quad x \in \mathbb{R},\, C \in \mathbb{R} \text{ und } -2(3x^2+C) > 0 \end{cases}$$

ii) $$y(x) = \pm\sqrt[4]{4\left(-\frac{1}{3}x^3+C\right)} \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R},\, C \in \mathbb{R} \text{ und } 4\left(-\frac{1}{3}x^3+C\right) > 0$$

iii) $$y(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ \sqrt[3]{\dfrac{1}{-3(\ln|x|+C)}} & , \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\, C \in \mathbb{R} \text{ und } -3(\ln|x|+C) \neq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 37:

i) $y_(x) = \frac{1}{x}\,(c + \ln|x|)$ mit $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $c \in \mathbb{R}$

ii) $y(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} - 2$ mit $x,\, C \in \mathbb{R}$

Aufgabe 38:

i) $y(x) = C \cdot \frac{1}{|x|}$ mit $C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ii) $y(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ mit $C \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 39:

i) $$y(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ \dfrac{C-1+\frac{1}{2}\ln|x|}{C+\frac{1}{2}\ln|x|} \cdot x & , \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},\, C \in \mathbb{R} \text{ und } C+\frac{1}{2}\ln|x| \neq 0 \end{cases}$$

ii) $$y(x) = \begin{cases} \pm 2x & , \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ 2x\,\dfrac{1+cx^4}{1-cx^4} & , \quad x\,,c \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ und } 1-cx^4 \neq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 40:

a) Lösungsgesamtheit: $y(x) = \pm\sqrt{2\,(\ln|x| - \frac{1}{2}x^2 + C)}$
mit $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $C \in \mathbb{R}$ so, dass $2\,(\ln|x| - \frac{1}{2}x^2 + C) > 0$ ist.

b) —