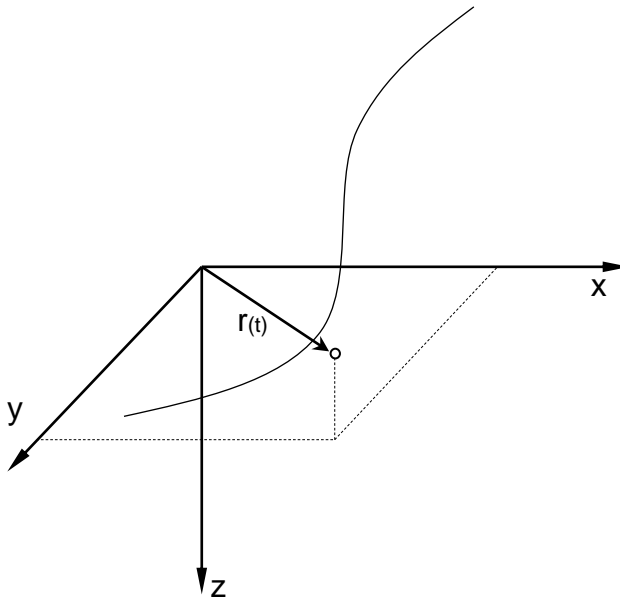


2.1 Allgemeines

In Analogie zu der zentralen Kräftegruppe der "Technischen Mechanik" besitzt der **Massenpunkt** im Raum **drei Freiheitsgrade**. Dies sind die Translationen in die x-, y- und z-Richtung. Die Rotation ist dabei per se nicht von Interesse. Seine Lage erfolgt durch die Angabe des Ortsvektors.

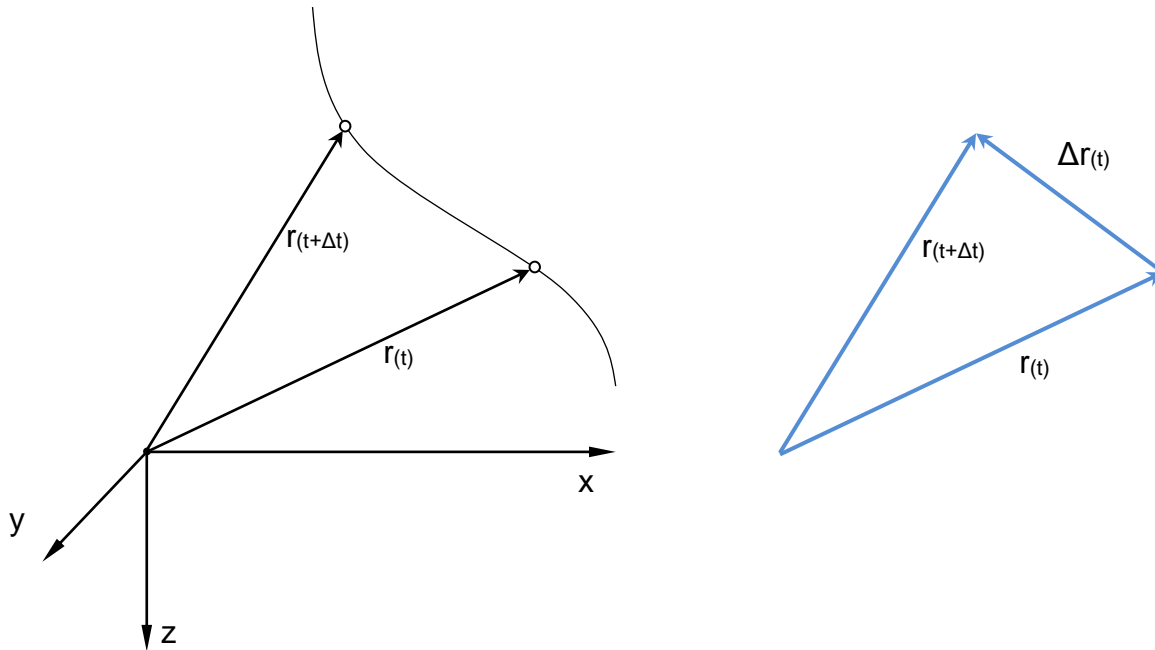
In der **Kinematik** wird die *Bewegung* des Massenpunktes beschrieben, also seine Lage im Raum nun aber im Gegensatz zu Statik in Abhängigkeit von der Zeit (**Geometrie der Bewegung**). Der Ortsvektor muss daher als zeitabhängiger Vektor formuliert werden.

$$\mathbf{r}_{(t)} = \begin{pmatrix} x_{(t)} \\ y_{(t)} \\ z_{(t)} \end{pmatrix} .$$



Der Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ beschreibt so die Bahn, auf der sich der Massenpunkt bewegt. Die zeitliche Änderung des Ortes bzw. des Weges heißt "Geschwindigkeit". Die Geschwindigkeit kann sich ebenfalls ändern, wenn der Massenpunkt in einen ungleichgewichtigen Zustand gerät, in dem die Summe aller Kräfte eben nicht gleich Null ist, sondern eine resultierende Kraft wirkt, die den Massenpunkt gemäß dem Newton'schen Axiom beschleunigt (Kapitel 3). Die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit heißt "Beschleunigung".

Wir betrachten zunächst einen Massenpunkt, der sich zu unterschiedlichen Zeitpunkten auf zwei benachbarte Orten A und B befindet und den Weg zwischen diesen beiden Punkten zurücklegt. Somit benötigen wir zwei Ortsvektoren um den Ort der Punktmassen zu den beiden Zeitpunkten t und $t + \Delta t$ angeben zu können.



Die Änderung des Ortsvektors kann mit $\Delta r = r(t+\Delta t) - r(t)$ beschrieben werden. Streng genommen weicht Δr natürlich von der Bahn ab, da er eine Sekante an der Bahn darstellt. Bilden wir innerhalb des Zeitintervalls Δt den Differenzenquotienten aus der Änderung des Ortsvektors und dem Zeitintervall selbst, so erhalten wir einen nicht exakten Wert für eine

reduzierte Geschwindigkeit mit $v_{red} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$; bei Verwendung einer Laufkoordinate s wäre

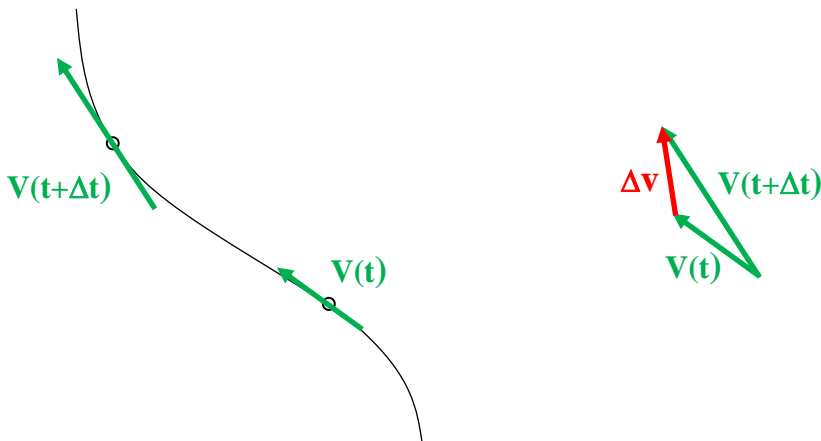
die mittlere Geschwindigkeit mit $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ sogar richtig beschrieben.

Die Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt t - also in einem unendlich kleinen Zeitintervall ($\Delta t \rightarrow 0$) - erhalten wir aus den Grenzwerten der Differenzenquotienten, also aus dem

Differentialquotienten $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$ exakt.

Anhand des Vektormodells erkennt man, dass Δr und somit auch der Geschwindigkeitsvektor tangential an der Bahnkurve orientiert ist.

Wir tragen analog zwei Geschwindigkeitsvektoren an die Bahn an:



Das Verhältnis von $\Delta v/\Delta t$ ergibt hier die mittlere Beschleunigung über den Zeitraum Δt . Da aber Δv , wie hier erkennbar ist, nicht unbedingt mit der Bahnrichtung korreliert, muss auch die Beschleunigung nicht unbedingt in Bahnrichtung verlaufen, was später z. B. bei den Rotationsbewegungen deutlich zu erkennen sein wird.

Analoges gilt für die momentane Änderung der Geschwindigkeit, also mit

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{r}.$$

Fazit: Bei bekanntem Weg-/ Zeitgesetz können über den Weg der Differentiation die Geschwindigkeit und die Beschleunigung zu jedem Zeitpunkt bestimmt werden. Oftmals ist aber als Initialgröße die Beschleunigung oder eine Kraft gegeben wie z. B. die:

- Erdbeschleunigung
- Erdbebenbeschleunigung
- Windlasten
- Rotationsbeschleunigungen.

Hieraus gilt es dann, die Geschwindigkeit und den Weg bzw. die Bahn zu berechnen. Dies geschieht dann über den mathematisch schwierigeren Weg der Integration:

$$\text{Geschwindigkeit: } v(t) = \int a(t) dt$$

$$\text{Weg-/ Zeitgesetz: } x(t) = \int v(t) dt$$

Dieser Weg setzt bekannter Weise die Betrachtungen von Randbedingungen voraus, um Informationen für die unbekanntenen Integrationskonstanten zu erhalten!

Dies wird uns auch in den weiteren Kapiteln begleiten!!