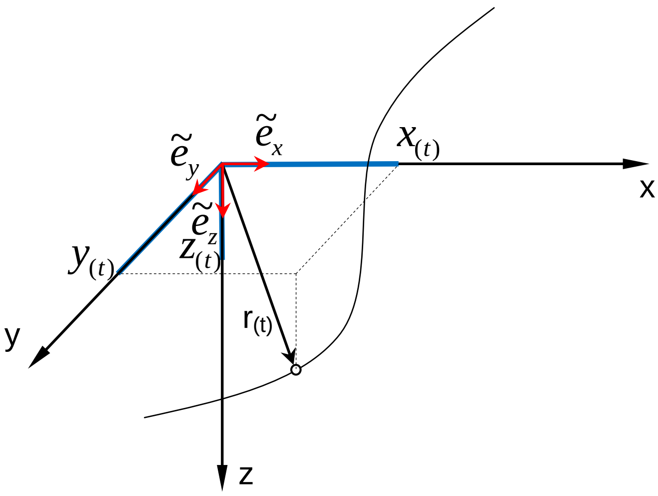
2.4 Kinematik der Rotation einer Punktmasse
(polares Koordinatensystem)

In Kapitel 2.2 haben wir das kartesische Koordinatensystem als geeigneten Hintergrund zur Beschreibung von Bewegungen in entkoppelten Richtungen kennengelernt.



Ort in Abhängigkeit der Zeit:

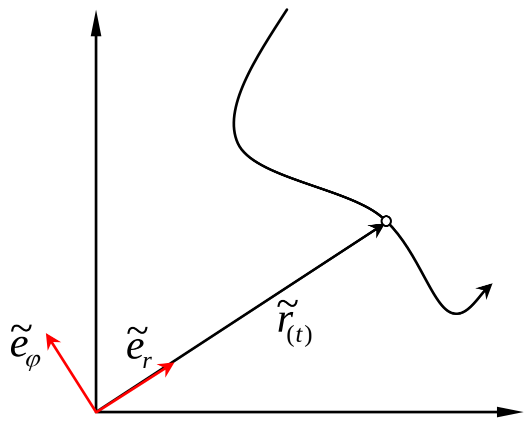
$$\tilde{r}_{(t)} = x_{(t)}\tilde{e}_x + y_{(t)}\tilde{e}_y + z_{(t)}\tilde{e}_z$$

Geschwindigkeit als Funktion der Zeit:

$$v_{(t)} = \dot{\tilde{r}}_{(t)} = \dot{x}_{(t)}\tilde{e}_x + \dot{y}_{(t)}\tilde{e}_y + \dot{z}_{(t)}\tilde{e}_z \quad \text{usw.}$$

<u>Bild 2.4.1</u>

Bei den kartesischen Koordinaten ändert der Ortsvektor seine Richtung nicht, weshalb er bei der Ableitung nach der Zeit als Konstante behandelt werden kann. Eben dies ist bei den Polarkoordinaten nicht der Fall.



Die Lage eines Massenpunktes ist durch einen Ortsvektor gegeben $\tilde{r}_{(t)}$. Dieser setzt sich zusammen aus dem zeitabhängigen Betragswert $r_{(t)}$, also der Länge des Ortsvektors, und dem Richtungsvektor $\tilde{e}_r$, der nun allerdings auch von der Zeit abhängig ist, da der Ortsvektor ja seine Länge und Richtung ändert während er die Bahnlinie "abfährt", also streng genommen $\tilde{e}_{r(t)}$.

<u>Bild 2.4.2</u>

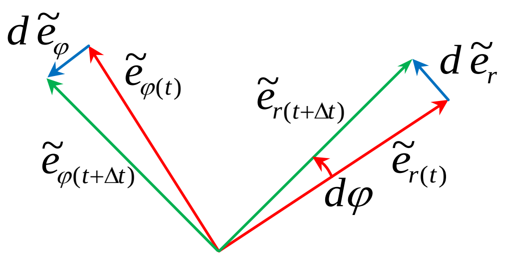
Beide Größen werden daher zeitabhängig formuliert und müssen bei der Ableitung nach der Zeit mit der Produktregel behandelt werden.

Es lautet also das <u>Wegzeitgesetz</u>: $\tilde{r}_{(t)} = r_{(t)} \cdot \tilde{e}_{r(t)}$

Über die Ableitung erhalten wir das <u>Geschwindigkeitszeitgesetzt</u>:

$$\dot{\tilde{r}}_{(t)} = \frac{d\,\tilde{r}_{(t)}}{dt} = \dot{r}_{(t)} \cdot \tilde{e}_{r(t)} + r_{(t)} \cdot \dot{\tilde{e}}_{r(t)}\,; \qquad \text{mit} \qquad \dot{\tilde{e}}_{r(t)} = \frac{d\,\tilde{e}_{r(t)}}{dt}$$

Aber: Wie leitet man einen Ortsvektor ab?



<u>Bild 2.4.3</u>

Innerhalb eines infinitesimal kleinen Zeitraums dt überstreicht der Einheitsvektor $\tilde{e}_{r(t)}$ den infinitesimal kleinen Winkel $d\varphi$. *(wir verzichten der Einfachheit halber im Folgenden bei den Ortsvektoren auf die Schreibweise* $\tilde{e}_{r(t)}$ *und schreiben* $\tilde{e}_r$. Hierbei entsteht der Differenzvektor $d\,\tilde{e}_r$, der senkrecht auf $\tilde{e}_r$ steht und in positive e_φ-Richtung zeigt (Bild 2.4.3). Für diese unendlich kleinen Winkel $d\varphi$ gilt, dass der Tangens gleich dem Bogenmaß ist. Mit Bild 2.4.3 ergibt sich:

$$d\,\tilde{e}_r = \left|\tilde{e}_r\right| \cdot d\varphi \cdot \tilde{e}_\varphi \qquad \text{diesen Ausdruck leiten wir nach der Zeit ab}$$

$$\frac{d\,\tilde{e}_r}{dt} = \frac{\left|\tilde{e}_r\right| \cdot d\varphi}{dt} \cdot \tilde{e}_\varphi \qquad \text{mit} \quad \left|\tilde{e}_r\right| = 1 \quad und \quad \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

$$\frac{d\,\tilde{e}_r}{dt} = \dot{\varphi} \cdot \tilde{e}_\varphi$$

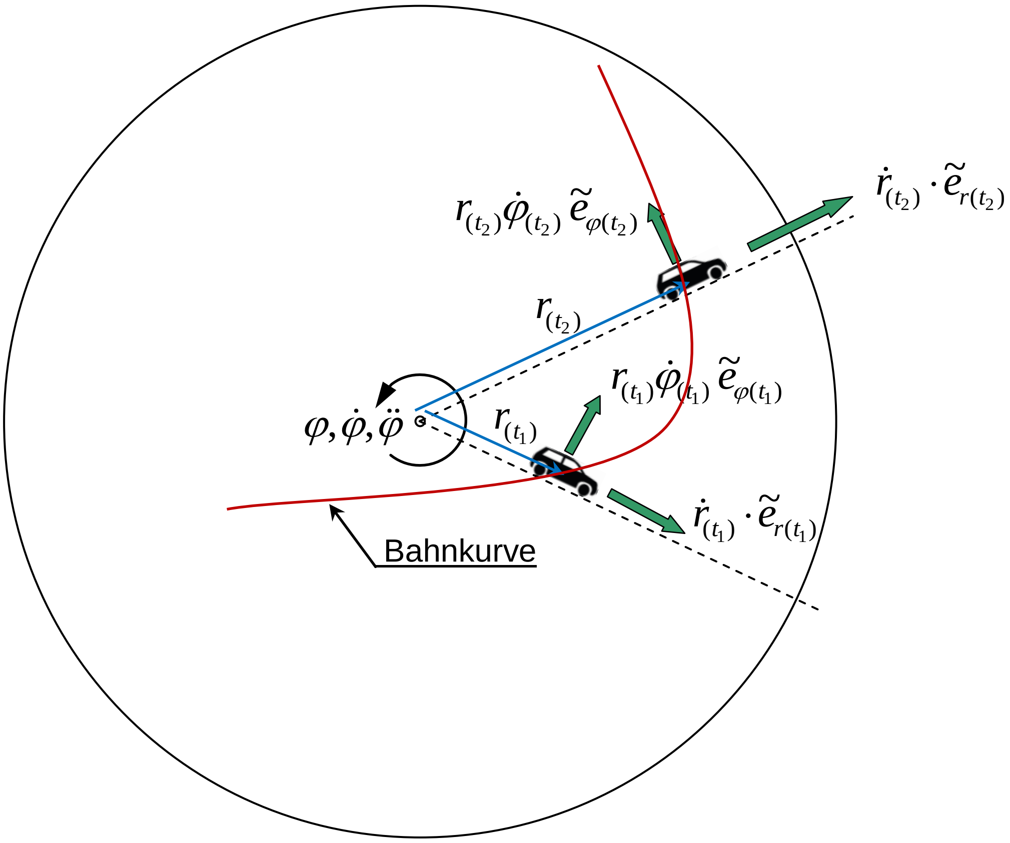
Somit ergibt sich das Geschwindigkeitszeitgesetz zu:

$$\dot{\tilde{r}}_{(t)} = \frac{d\,\tilde{r}_{(t)}}{dt} = \underbrace{\dot{r}_{(t)} \cdot \tilde{e}_r}_{\text{Radialer Anteil}} + \underbrace{r_{(t)} \cdot \dot{\varphi}\,\tilde{e}_\varphi}_{\text{Zirkularer Anteil}}$$

$\dot{\varphi}$ heißt "Winkelgeschwindigkeit" und gibt die Änderung des Winkles über die Zeit an. Die Einheit ist streng genommen $\frac{rad}{s}$, also Radiant pro Sekunde, auch geschrieben als $1/s$. Eine ganze Umdrehung pro Sekunde lautete dann also $\frac{2\pi}{s}$.

<u>Veranschaulichung:</u>

Ein Fahrzeug fährt auf einer Kreisscheibe, die sich mit einer Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ dreht, auf einer geraden Linie. Dargestellt ist die Situation zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten t_1 und t_2. Der radiale Anteil $\dot{r}_{(t)} \cdot \tilde{e}_{r(t)}$ ist die Geschwindigkeit des Fahrzeugs selber, eben auf dieser Geraden. Der zirkulare Anteil $r_{(t)}\dot{\varphi}_{(t)}\,\tilde{e}_{\varphi(t)}$ ist der Anteil, der sich aus der Rotation der Kreisscheibe ergibt. Aus beiden Geschwindigkeiten setzt sich die rote Bahnkurve zusammen.



<u>Beschleunigung:</u> Es folgt die nächste Ableitung nach der Produktregel. Hierbei ist jetzt auch der Ortsvektor $\tilde{e}_{\varphi}$ abzuleiten, wobei hier analog Bild 2.4.3 vorgegangen wird allerdings unter Berücksichtigung der negativen $\tilde{e}_r$-Richtung:

$$\frac{d\,\tilde{e}_{\varphi}}{dt} = -\dot{\varphi} \cdot \tilde{e}_r \text{, daraus folgt:}$$

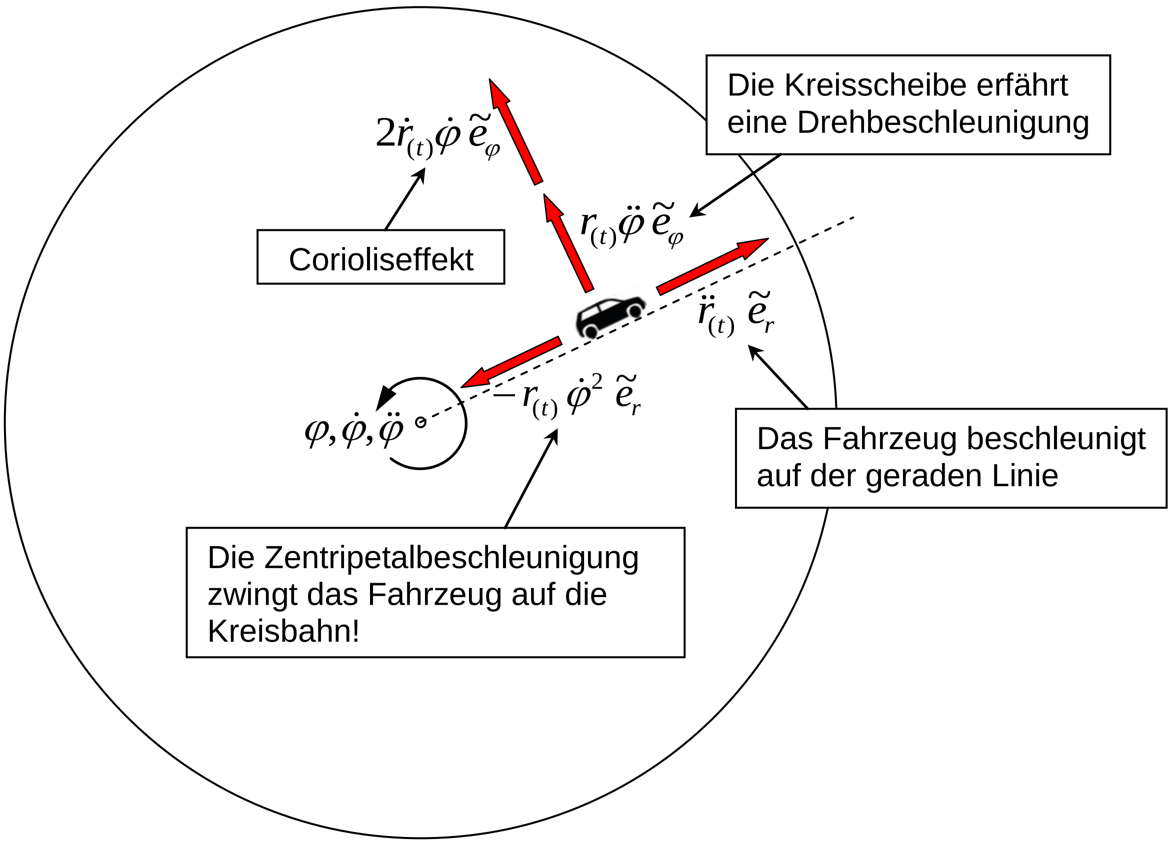
$$\frac{d\,\dot{\tilde{r}}_{(t)}}{dt} = \frac{\dot{r}_{(t)} \cdot \tilde{e}_r + r_{(t)} \cdot \dot{\varphi}\,\tilde{e}_{\varphi}}{dt}$$

$$\ddot{\tilde{r}}_{(t)} = \frac{d\,\dot{\tilde{r}}_{(t)}}{dt} = \ddot{r}_{(t)} \cdot \tilde{e}_r + \dot{r}_{(t)} \cdot \dot{\varphi}\,\tilde{e}_{\varphi} + \dot{r}_{(t)} \cdot \dot{\varphi}\,\tilde{e}_{\varphi} + r_{(t)} \cdot \ddot{\varphi}\,\tilde{e}_{\varphi} - r_{(t)} \cdot \dot{\varphi}^2\,\tilde{e}_r$$

Wir sortieren wieder nach radialer und zirkularer Richtung:

$$\ddot{\tilde{r}}_{(t)} = \underbrace{(\ddot{r}_{(t)} - r_{(t)} \cdot \dot{\varphi}^2)\,\tilde{e}_r}_{\text{Radialer Anteil}} + \underbrace{(r_{(t)} \cdot \ddot{\varphi} + 2\dot{r}_{(t)} \cdot \dot{\varphi})\,\tilde{e}_\varphi}_{\text{Zirkularer Anteil}}$$

<u>Veranschaulichung:</u> wobei wir vereinfachend nur einen Zeitpunkt darstellen:



Der zirkulare Anteil $2\dot{r}_{(t)}\dot{\varphi}\,\tilde{e}_\varphi$, der keine unmittelbare Beschleunigung enthält, nämlich lediglich die Winkelgeschwindigkeit und die radiale Geschwindigkeit auf der Geraden, heißt Coriolisbeschleunigung. Sie ergibt sich aus der Überlagerung beider Geschwindigkeiten, indem das Fahrzeug infolge der Kreisbewegung der Scheibe eine gewisse Bahngeschwindigkeit besitzt und infolge der radialen Bewegung in Richtung Kreismittelpunkt eine kleinere Strecke überfährt und somit schneller über Grund fährt.