Integralrechnung

Bisher: Differentiation von Funktionen, d.h. gegeben $f(x)$ und gesucht $f'(x)$.
Jetzt: Integration und Stammfunktionen, d.h. das „umgekehrte Problem“.

Gegeben: Eine Funktion $f(x)$.
Gesucht: Eine Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$.

$F(x)$ heißt **Stammfunktion** von $f(c)$.

Beispiel: Ist $f(x) = 1$, dann ist $F(x) = x + c$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f.

Uneigentliche Integrale und Stammfunktionen

Satz 1:
Ist F eine Stammfunktion von f, so ist auch $F + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f.

Satz 2:
Sind F_1 und F_2 Stammfunktionen von f, so ist $F_1 = F_2 + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Definition: Sei F ein Stammfunktion von f. Dann nennt man

$$\int f(x)dx = F(x) + c\,, \qquad c \in \mathbb{R}$$

das **unbestimmte Integral** von f.

Somit ist das unbestimmte Integral eine andere Schreibweise für die Menge aller Stammfunktionen $\{F + c |\, c \in \mathbb{R}\}$.

Die Konstante c heißt **Integrationskonstante.**
Die Funktion f heißt **Integrand.**

Stammfunktionen elementarer Funktionen:

$f(x)$	$F(x)$
$k = const$	$kx + c$
$x^n, \quad n \neq -1$	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} x^{3/2} + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert + c$

$f(x)$	$F(x)$
e^x	$e^x + c$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)} + c$
$\ln(\mathrm{x})$	$x\ln(x) - x + c$
$\sinh(x)$	$\cosh(x) + c$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) + c$

Hinweis: c ist stets die reelle Integrationskonstante

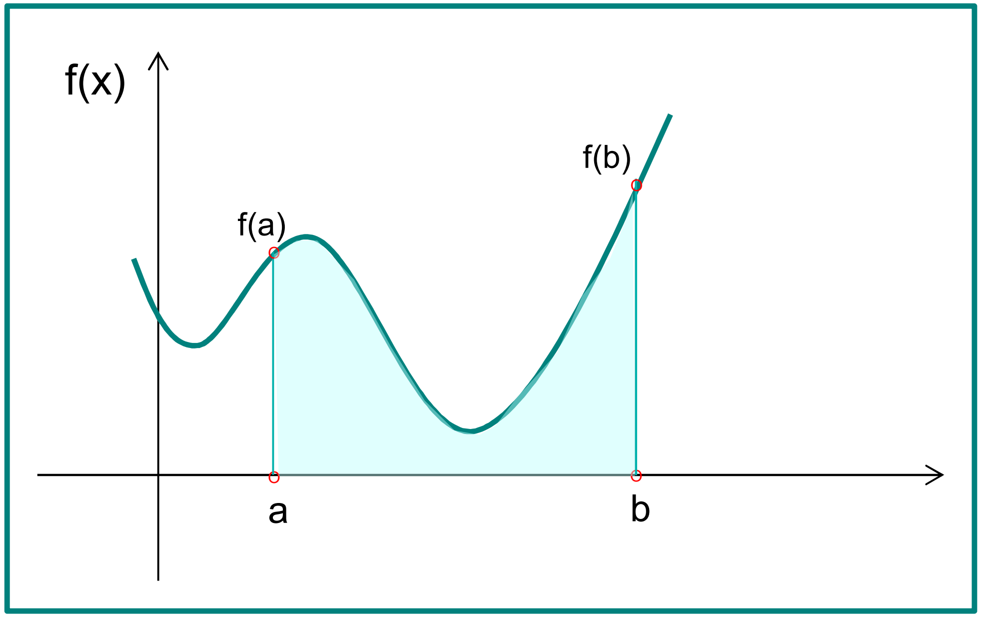
Das bestimmte Integral einer stetigen Funktion f

Liegt der Graph von f zwischen $x = a$ und $x = b$ **oberhalb** der x-Achse,

so gibt das so genannte **bestimmte Integral von f über dem Intervall** $[a, b]$

$$\boldsymbol{A = \int_a^b f(x)\,dx}$$

die Größe der eingeschlossenen Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse im Bereich von a bis b an.

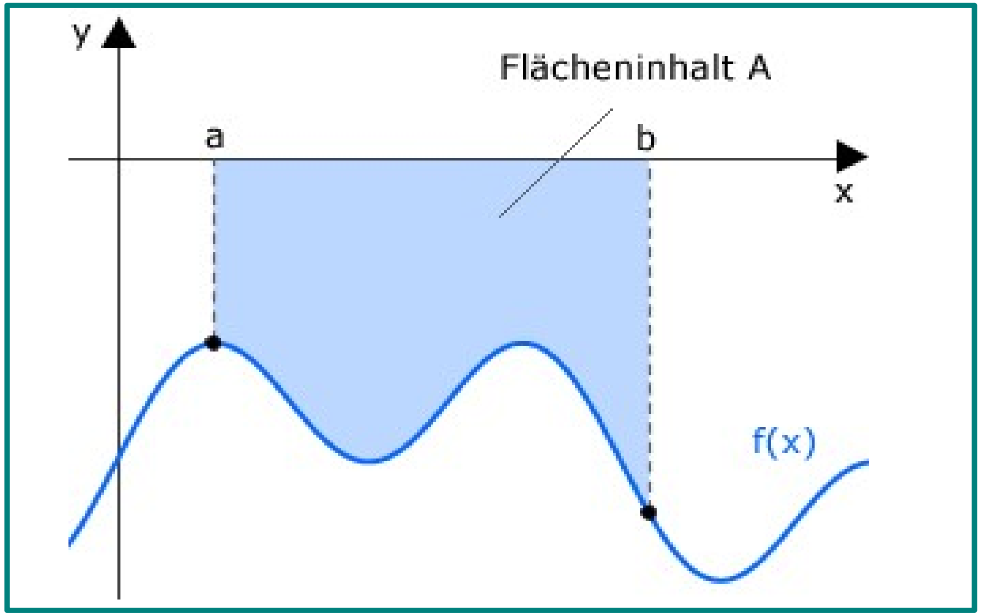


Das bestimmte Integral einer stetigen Funktion f

Liegt der Graph der Funktion f zwischen a und b **unterhalb** der x-Achse, so ist der Wert des bestimmten Integrals **negativ**. Dann gilt:

$$\boldsymbol{A = -\int_a^b f(x)dx}$$

ist die Größe des Flächeninhalts der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen, der x-Achse und den beiden Senkrechten an den Stellen a und b.



Elementare Integrationsregeln

- **Faktorregel**: Sei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante, dann gilt
$$\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)dx.$$
- **Summenregel**:
$$\int [\, f_1(x) \pm \cdots \pm f_n(x)\,]dx = \int f_1(x)dx \pm \cdots \pm \int f_n(x)dx$$
- **Vertauschungsregel**: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- **Nullregel**: $\int_a^a f(x)dx = 0$
- **Zerteilungsregel**: Sei $a \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n \leq b$, dann gilt
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \cdots + \int_{c_n}^{b} f(x)dx$$

Integrationsmethoden: Substitution

Integrationsmetoden:

- durch **Substitution**
- durch **partielle Integration**
- durch **Partialbruchzerlegung** (echt gebrochen rationale Funktionen)
- durch **numerische Integration**

Integrationsmethoden: Substitution

Das Ziel der Integration durch Substitution ist es, das Integral möglichst stark zu vereinfachen.

Wir betrachten eine differenzierbare Funktion u, deren Wertebereich im Definitionsbereich von f enthalten ist, so dass wir $f(u(x))$ bilden können. Weiter sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt:

$$\int_a^b f\big(u(x)\big) \cdot u'\,(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} (u)du = F\big(u(b)\big) - F\big(u(a)\big)$$

Merkregel: $u'(x) = \frac{du}{dx}$ $\qquad du = u'(x)dx$

Beweis mit Hilfe der Kettenregel: $\big(F\big(u(x)\big) + c\big)' = f(u(x)) \cdot u'(x)$

Integrationsmethoden: Beispiel Substitution

Gesucht: $$\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{2} e^{\sin(x)} \, dx$$

Nebenrechnung:

Mit $u(x) := \sin(x)$ bzw $\frac{du}{dx} = \cos(x)$ gilt:

$$du = \cos(x)\, dx$$
$$u(0) = \sin(0) = 0$$
$$u(\pi/2) = \sin(\pi/2) = 1$$

Also: $$\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)\, dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2} e^u du = \frac{1}{2}\left(e^1 - e^0\right)$$

Integrationsmethoden: Partielle Integration

$$\boxed{\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx}$$

<u>Herleitung mit Hilfe der Produktregel</u>:

$$(u\cdot v)'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

$$\Leftrightarrow \qquad u(x)\cdot v'(x) = (u\cdot v)'(x) \; - u'(x)\cdot v(x)$$

Die Bildung des unbestimmten Integrals auf beiden Seiten liefert die Behauptung denn

mit $\int (u\cdot v)'(x)dx = u(x)\cdot v(x) + c$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int u(x)\cdot v'(x)\,dx \quad &= \int [(u\cdot v)'(x) - u'(x)\cdot v(x)]\,dx \\ &= \int (u\cdot v)'(x)dx - \int u'(x)\cdot v(x)dx \\ &= u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)dx\end{aligned}$$

Integrationsmethoden: Partielle Integration Beispiele

$$\mathrm{I}_1 = \int \ln(x)\ dx = \int \underset{v'}{1} \cdot \underset{u}{\ln(x)}\ dx = \underset{v}{x} \cdot \underset{u}{\ln(x)}\ - \int \underset{v}{\mathrm{x}} \cdot \underset{u'}{\frac{1}{x}}\ dx$$

$$= x \cdot \ln(x) - x + c\ , c \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{I}_2 = \int \underset{u}{x}\ \cdot \underset{v'}{\sin(x)}\, dx\ = \underset{u}{x} \cdot \underset{v}{\big(-cox(x)\big)} - \int \underset{u'}{1}\ \cdot \underset{v}{(-\cos(x))}\, dx$$

$$= -x\ cos(x) + \sin(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Integrationsmethoden: Partialbruchzerlegung

- Polynome nennt man auch **ganz rationale Funktionen**.

- Eine **(gebrochen) rationale Funktion** ist eine Funktion

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1\, x^1 + a_0}{b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \cdots b x^1 + b_0} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

- Eine **echt gebrochen rationale Funktion** ist eine rationale Funktion $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$, bei der der Grad des Zählerpolynoms $Z(x)$ **kleiner** ist als der Grad des Nennerpolynoms N(x).

Integrationsmethoden: Partialbruchzerlegung

- Jede „unecht“ gebrochen rationale Funktion f lässt sich als Summe einer ganzen und einer echt gebrochenen Funktion schreiben.

- Jede gebrochen rationale Funktionen lässt sich in so genannte **Partialbrüche** zerlegen.

- Partialbrüche, mit denen wir in dieser Vorlesung arbeiten:

$$\boxed{\frac{A}{(x-b)^k}, \text{ mit } A, b \in \mathbb{R} \text{ und } k \in \mathbb{N}}$$

- Partialbrüche sind leicht zu integrieren:

$$\int \frac{A}{(x-b)^k}\, dx = A\,\frac{1}{-k+1}(x-b)^{-k+1} + c \quad \text{für } k \neq 1$$

$$\int \frac{A}{(x-b)}\, dx = \ln|x-b| + c$$

Integrationsmethoden: Partialbruchzerlegung

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Satz 3: Gegeben sei die echt gebrochen rationale die Funktion f durch

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0}{x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \cdots b x^1 + b_0} = \frac{Z(x)}{N(x)} \quad \text{mit} \quad n < l$$

und N habe die Linearfaktorzerlegung

$$N(x) = (x - x_1)^{l_1} (x - x_2)^{l_2} \ldots (x - x_k)^{l_k} \quad \text{mit} \quad l_1 + l_2 + \ldots + l_k = l$$

Dann lässt sich f mit Hilfe von Partialbrüchen schreiben als:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{A_1}{(x-x_1)^1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{l_1}}{(x-x_1)^{l_1}} \\ & + \frac{B_1}{(x-x_2)^1} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{B_{l_2}}{(x-x_2)^{l_2}} \\ & + \cdots \\ & + \frac{K_1}{(x-x_k)^1} + \frac{K_2}{(x-x_k)^2} + \cdots + \frac{K_{l_k}}{(x-x_k)^{l_k}} \end{aligned}$$

Integrationsmethoden: Beispiel Partialbruchzerlegung (1)

- Gegeben: $f(x) = \frac{5x-7}{x^2-3x+2} = \frac{5x-7}{(x-1)(x-2)}, \ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1;2\}$
- Ansatz für die Partialbruchzerlegung: $f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$

- Bestimmung von A u. B mittels **Koeffizientenvergleich**: Sei $x \in \mathbb{D}_f, \ beliebig$

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x+(-2A-B)}{(x-1)(x-2)} \overset{!}{=} \frac{5x-7}{(x-1)(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad (A+B)x + (-2A-B) = 5x-7$$

$$\Leftrightarrow \qquad A+B=5 \quad \text{und} \quad -2A-B=-7$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösung $A = 2$ und $B = 3$,
d.h. die gesuchte Partialbuchzerlegung ist

$$f(x) = \frac{5x-7}{x^2-3x+2} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$$