Vektoralgebra

- Anwendungen: Ebenen

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Achtung!

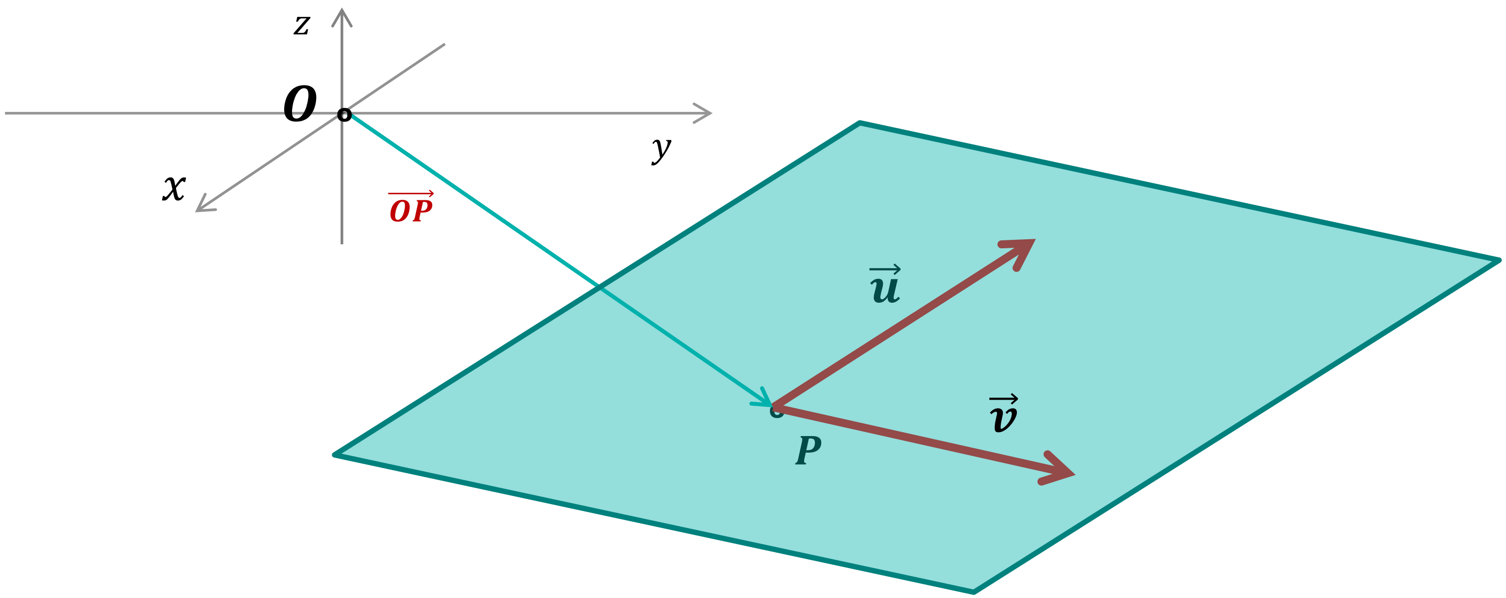
Dieses Folienskript soll den Studierenden einiges an mechanischer Schreibarbeit abnehmen und dazu beitragen, sich auf das eigentliche Fach und seine vielfältigen Themen konzentrieren zu können.

Es ersetzt keinesfalls eigene, ergänzende Notizen und Aufzeichnungen zu den Lehrinhalten, die während der Vorlesungen vermittelt werden.

Dieses Skript stellt kein Lehrbuch dar!
Nicht alles, was in der Vorlesung erarbeitet wird, ist im Skript enthalten.

Vektorielle Darstellung einer Ebene

Eine **Ebene** ist ein unbegrenzt ausgedehntes, flaches, zweidimensionales Objekt.

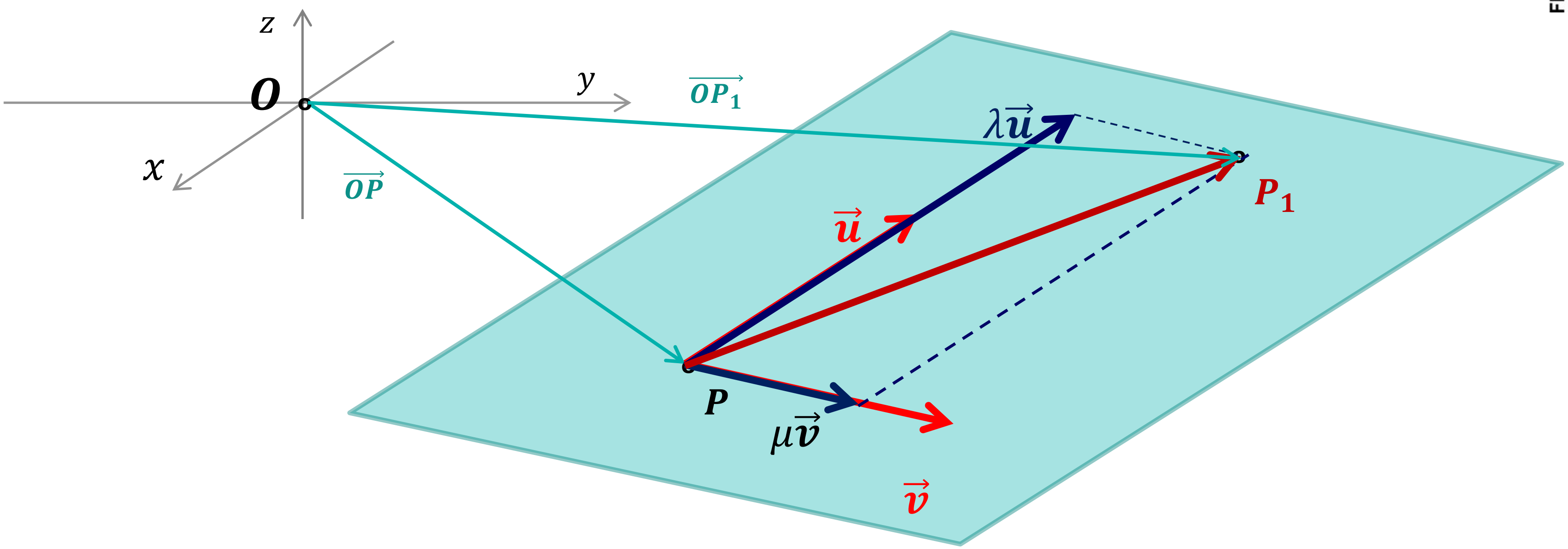


Eine Ebene im Raum kann eindeutig festgelegt werden durch einen Punkt P und zwei nicht kollineare Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Vektorielle Darstellung einer Ebenen

Eine Ebene im Raum kann eindeutig festgelegt werden durch einen

Punkt $\boldsymbol{P}$ und zwei nicht kollineare Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$,

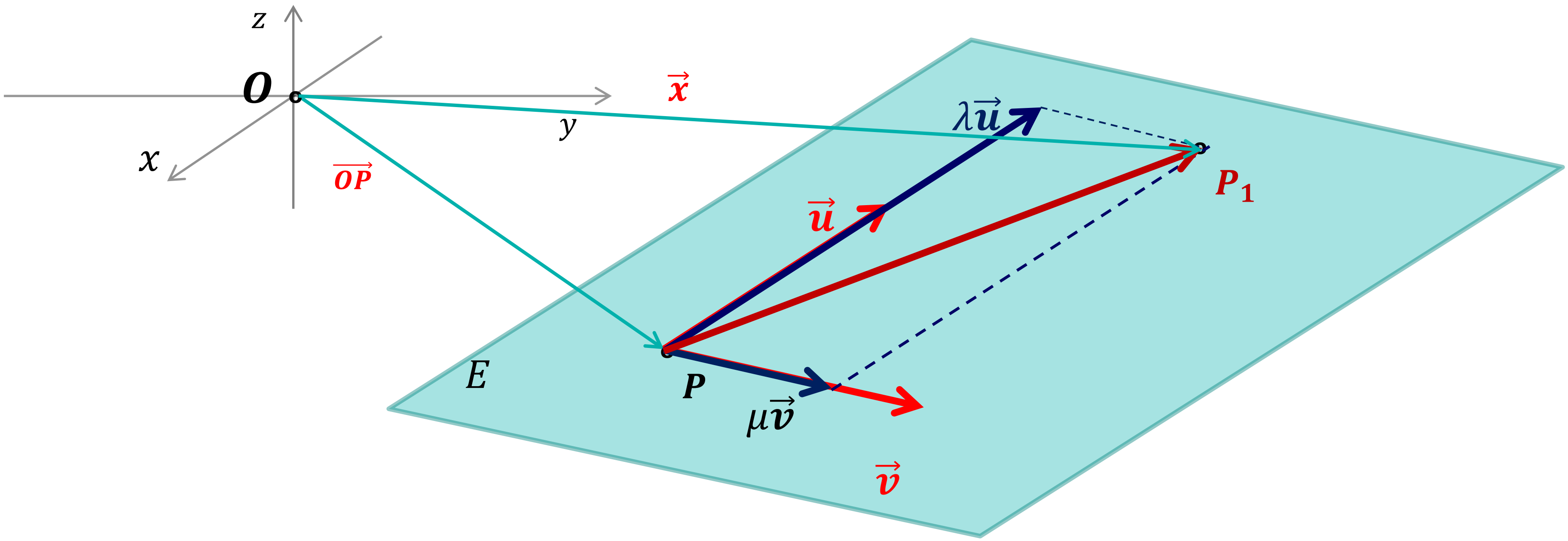


denn so kann jeder Punkt P_1 in der Ebene eindeutig bestimmt werden durch:

$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP} + \lambda\,\vec{u} + \mu\vec{v}$ für ein bestimmtes $\lambda \in \mathbb{R}$ und ein bestimmtes $\mu \in \mathbb{R}$.

Vektorielle Darstellung einer Ebenen

Die Ebene besteht somit aus allen Punkten, deren Ortsvektoren $\vec{x}$ die Gleichung $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda\,\vec{u} + \mu\vec{v}$
für ein bestimmtes $\lambda \in \mathbb{R}$ und ein bestimmtes $\mu \in \mathbb{R}$ erfüllen.



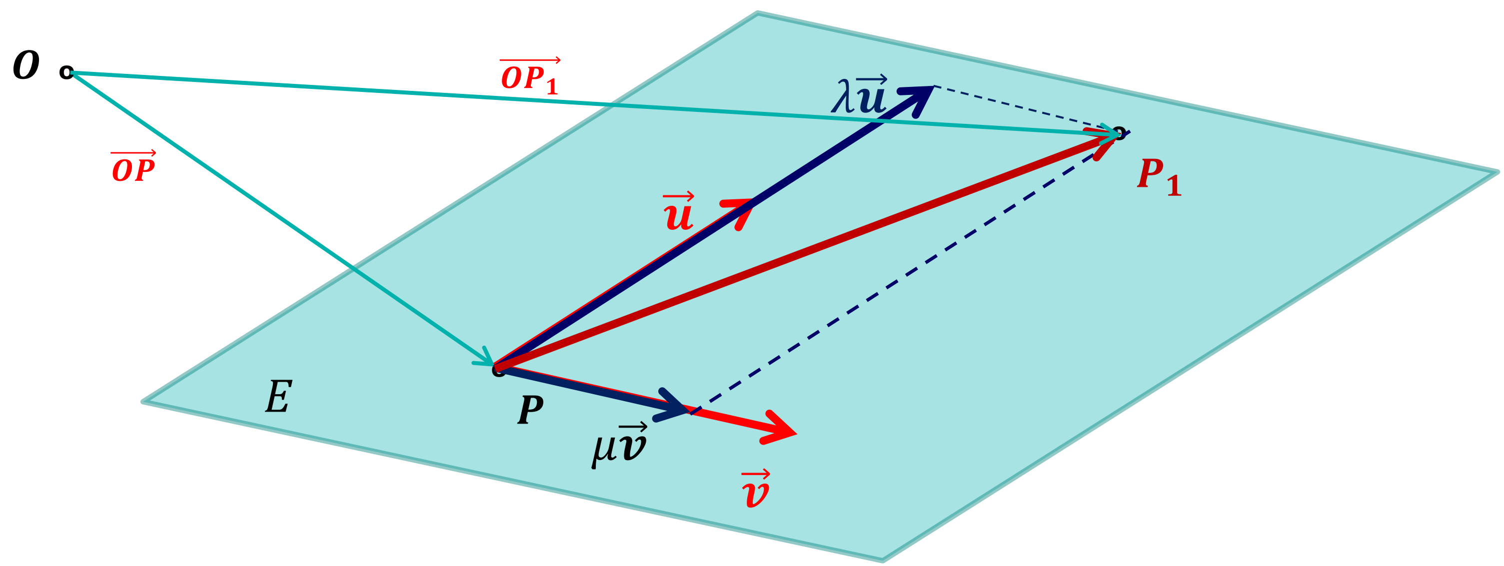
Damit ergibt sich die allgemeine Punkt-Richtungs-Form der Ebene:

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda\,\vec{u} + \mu\vec{v} \quad \text{mit} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Vektorielle Darstellung einer Ebenen

Die allgemeine Punkt-Richtungs-Form der Ebene lautet in Komponentenschreibweise:

$$E: \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Ortsvektor}\\\text{irgendeines}\\\text{Punktes}\\\text{der Ebene}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Ortsvektor}\\\text{eines festen,}\\\text{bekannten}\\\text{Punktes } P\\\text{der Ebene}}} \underbrace{+ \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Richtungs-}\\\text{vektoren}\\\vec{u} \text{ und } \vec{v}}} \quad \text{mit} \quad \underbrace{\lambda, \mu \in \mathbb{R}}_{\substack{\text{unabhängige}\\\text{reelle Parameter}}}$$



Vektorielle Darstellung einer Ebenen

Beispiel:

Gegeben: Der Punkt $P(3\,|5\,|1\,)$ der Ebene E,

sowie ihre Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe:

1. Geben Sie die Punkt-Richtungs-Form der Ebene E an.

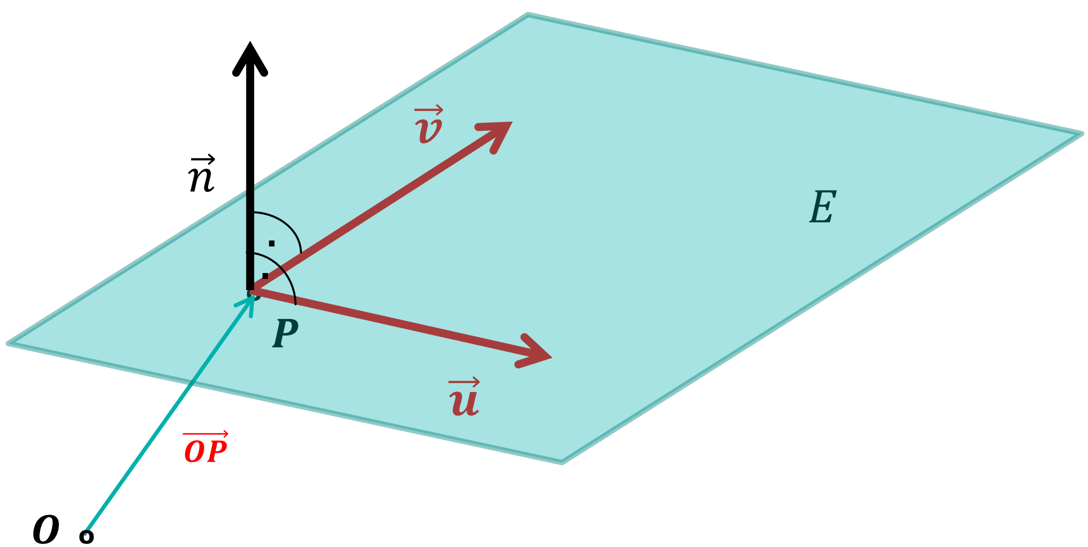
2. Zeigen Sie, dass der Punkt $Q(15\,|\,12|\,8)$ in der Ebene E liegt.

3. Bestimmen Sie einen Normalenvektor der Ebene E.

Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene

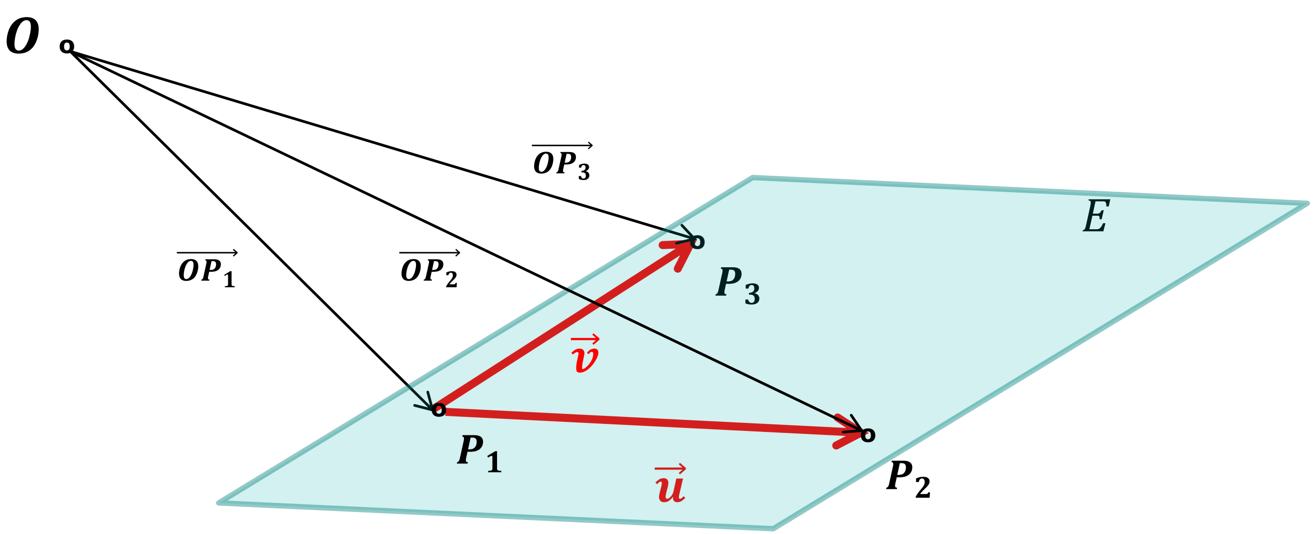
Besonders nützlich ist der **Normalenvektor** $\vec{n}$ der Ebene E, der auf der Ebene senkrecht steht.

- Ist $\vec{n}$ einNormalenvektor der Ebene, dann ist auch jedes Vielfache von $\vec{n}$ ein Normalenvektor.
- Mit dem Vektorprodukt können wir einen Normalenvektor der Ebene bestimmen, z.B. $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$
- Als Symbol für „$\vec{n}$ steht senkrecht auf E" schreiben wir: $\vec{n} \perp E$



Punkt Richtungsform der Ebene aus drei Punkten

Jede Ebene wird durch die Angabe von drei Punkten eindeutig festgelegt, wenn diese **nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.**

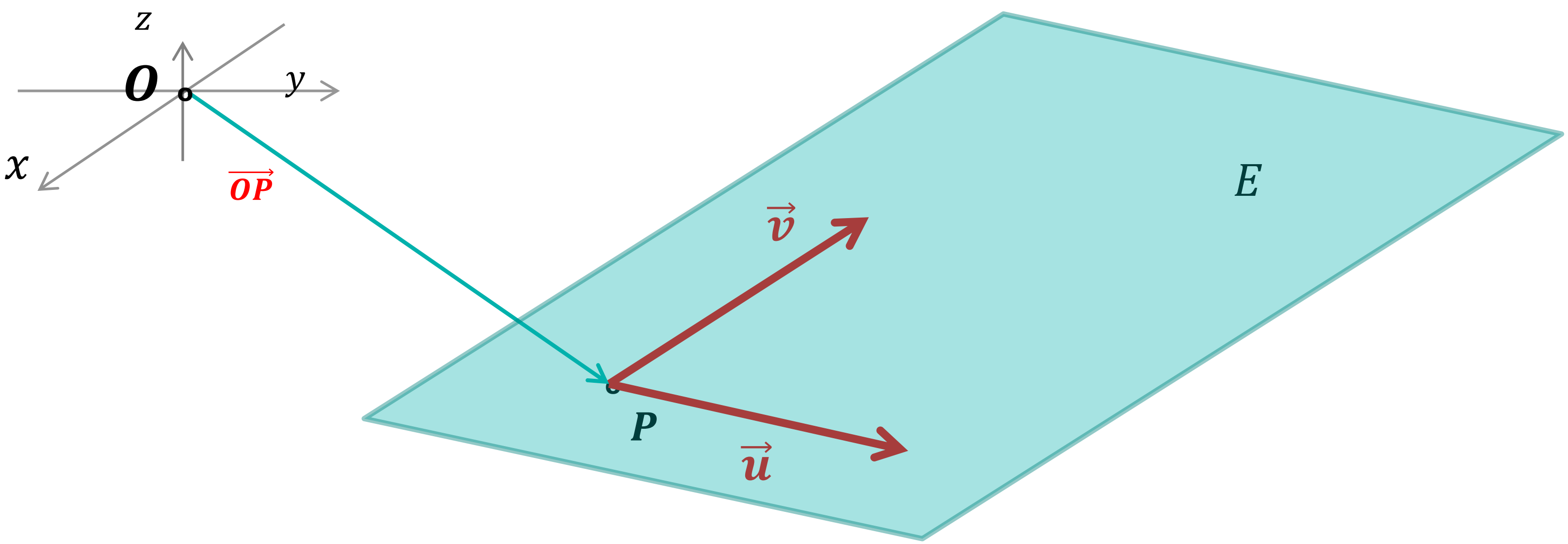


Dann erhalten wir eine Punkt-Richtungs-Form der Ebenen mit Hilfe der drei Punkte P_1, P_2 und P_3 durch:

$$E:\ \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda\underbrace{\left(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}\right)}_{=\overrightarrow{P_1P_2}} + \mu\underbrace{\left(\overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_1}\right)}_{=\overrightarrow{P_1P_3}}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Punkt-Richtungs-Form aus zwei Punkten

Jede Ebene wird durch ihre Punkt-Richtungs-Form eindeutig bestimmt.



1. Der Stützvektor der Punkt-Richtungs-Form ist jedoch **nicht** eindeutig: Der Ortsvektor **jedes** Punktes auf der Ebene kann als Stützvektor gewählt werden.

2. Auch die Richtungsvektoren der Punkt-Richtungs-Form sind **nicht** eindeutig: **Jedes Paar nicht kollinearer Vektoren in der Ebenen** kann als Paar von Richtungsvektoren gewählt werden.

Vektorielle Darstellung einer Ebene

Beispiel:

Gegeben: Die Punkt $P_1\ (3\ |5\ |1\ )$, $P_2(5\ |10\ |2\ )$ und $P_3\ (8\ |6\ |4\ )$

einer Ebene E.

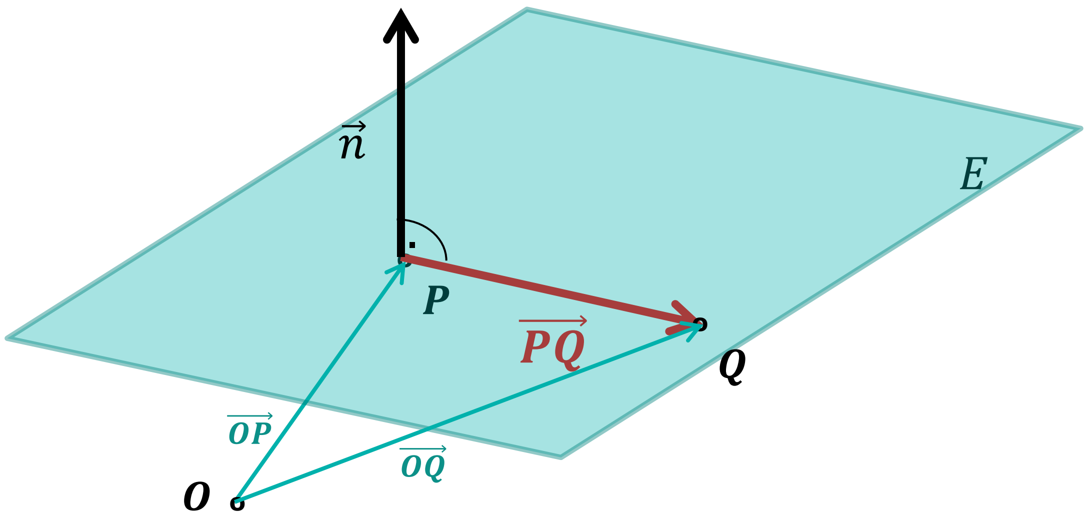
Aufgabe:

1. Bestimmen Sie eine Punkt-Richtungs-Form der Ebene E.

3. Bestimmen Sie einen Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E mit Hilfe der drei gegebenen Punkte P_1, P_2 und P_3.

Normalform einer der Ebene E

Eine alternative Möglichkeit eine Ebene eindeutig zu beschreiben ist die so genannte **Normalform** der Ebene.



Kennen wir einen Punkt P der Ebene E und ihren Normalenvektor $\vec{n}$,

dann gilt für jeden Punkt Q in der Ebene:

$$\boxed{\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n} \cdot \left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right) = 0}$$

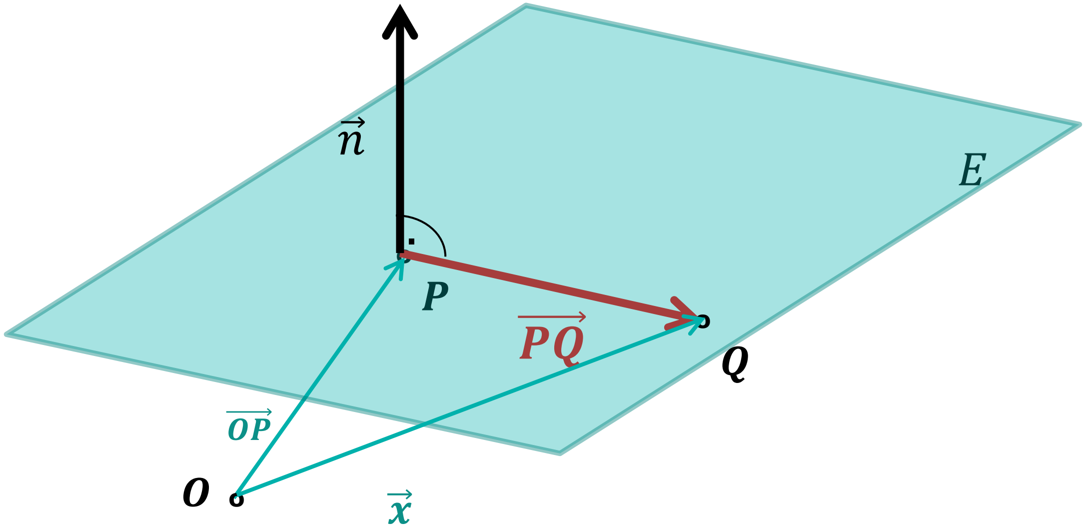
Normalform einer der Ebene E

Seien P und $\vec{n}$ in Komponentenschreibweise gegeben durch

$P(x_1, y_1, z_1)$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$. Und sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ der Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Ebene.

Dann erhalten wir die Normalform in Komponentenschreibweise:

$$\boxed{\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right) = 0}$$



bzw.

$$\boxed{n_x \cdot (x - x_1) + n_y \cdot (y - y_1) + n_z \cdot (z - z_1) = 0}$$

Normalform einer der Ebene E

Bemerkungen:

- Die Normalform einer Ebene wird auch als **parameterfreie Form der Ebene** bezeichnet.

- Jeder Normalenvektor einer Ebene kann genutzt werden, um eine Normalform zu berechnen. Auch die Normalform der Ebene ist somit nicht eindeutig.

- Es gibt eine besondere Normalform: **Die HESSEsche Normalform** Bei dieser Normalform ist $\vec{n}$ der normierte Normalenvektor $\overrightarrow{n_e}$ der Ebene, d.h. es gilt $|\overrightarrow{n_e}| = 1$. Fasst man die Hessesche Normalform durch Ausmultiplizieren zusammen zu

$$\overrightarrow{\boldsymbol{n_e}} \cdot (\vec{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{OP}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{n_e}} \cdot \vec{\boldsymbol{x}} - \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

dann gibt c den Abstand der Ebene zum Ursprung an.

Normalform einer der Ebene E

Bemerkungen:

- Durch Ausmultiplizieren wird aus $n_x \cdot (x - x_1) + n_y \cdot (y - y_1) + n_z \cdot (z - z_1) = 0$

$$n_x x + n_y y + n_z z = d$$

für ein $d \in \mathbb{R}$. Diese Variante einer Normalform nennen wir auch die **Koordinatenform** der Ebene

- Durch Ausmultiplizieren und Umformen wird aus $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \overrightarrow{OP}) = 0$

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}$$

Dies lässt sich auch zusammenfassen zu

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{x} \cdot \vec{n} = d$$

für ein $d \in \mathbb{R}$. Beide Schreibweisen brauchen wir häufig.

Vektorielle Darstellung einer Ebene

Beispiel:

Gegeben: Der Punkt $P_1\ (2 \mid -5 \mid 3)$ und

der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ der Ebene E.

Aufgabe:

- Bestimmen Sie eine Normalform der Ebene.
- Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene.

Vektorielle Darstellung einer Ebene

Ausblick auf die kommenden Aufgabentypen:

- Abstand Punkt - Ebene
- Abstand Gerade - Ebene
- Abstand zweier paralleler Ebenen
- Schnittgerade und Schnittwinkel zweier Ebenen

Vektorielle Darstellung einer Ebene

Ausblick auf die kommenden Aufgabentypen:

- Abstand Punkt - Ebene
- Abstand Gerade - Ebene
- Schnittgerade und Schnittwinkel zweier Ebenen
- Abstand zweier paralleler Ebenen
- Schnittgerade und Schnittwinkel zweier Ebenen

FH AACHEN UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

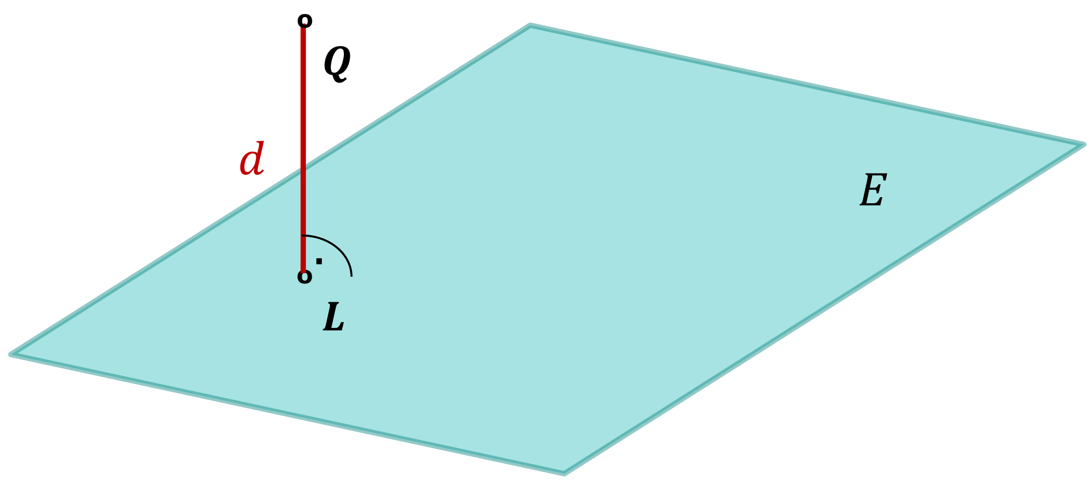
Abstand $d(Q, E)$ des Punktes Q zur Ebene E

Definition: Der **Abstand eines Punktes zu einer Ebene** ist die Länge derjenigen Verbindungsstrecke vom Punkt zur Ebene, die zu der Ebene orthogonal ist.

Bemerkung: Diese orthogonale Verbindungsstrecke ist die kürzeste von allen möglichen Verbindungsstrecken vom Punkt zur Ebene.
Man bezeichnet diese kürzeste Verbindungsstrecke auch als das **Lot**, ihren Endpunkt auf der Geraden als den **Lotfußpunkt** $\boldsymbol{L}$.

Wir schreiben für den Abstand $d(Q, E)$ oder d, wenn der Bezug eindeutig ist.

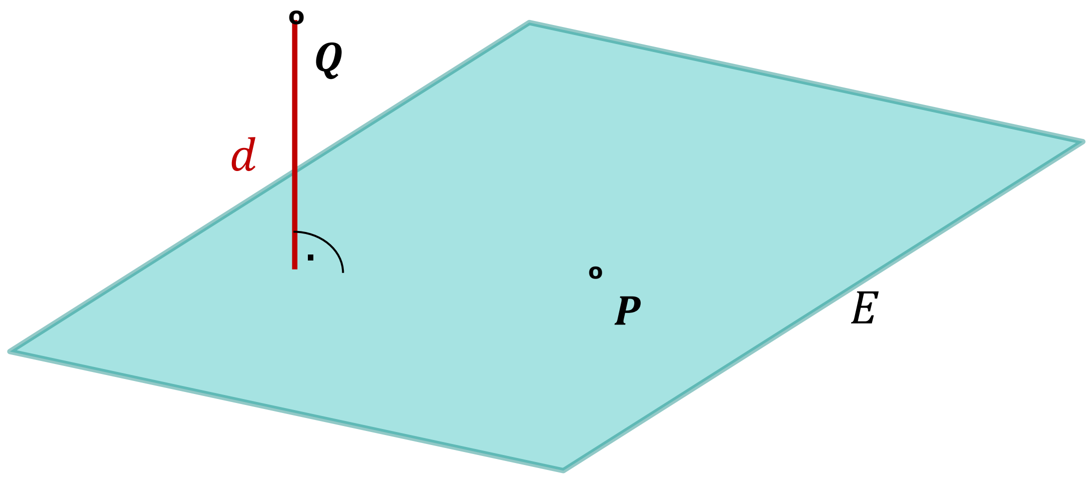
Beispiel:



Abstand $d(Q,E)$ des Punktes Q zur Ebene E

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Gegeben: Ebene E in Normalform, d.h. es gelte $\vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \overrightarrow{OP}\right) = 0$ für alle Punkte mit Ortsvektor $\vec{x}$ der Ebene sowie der Punkt Q.



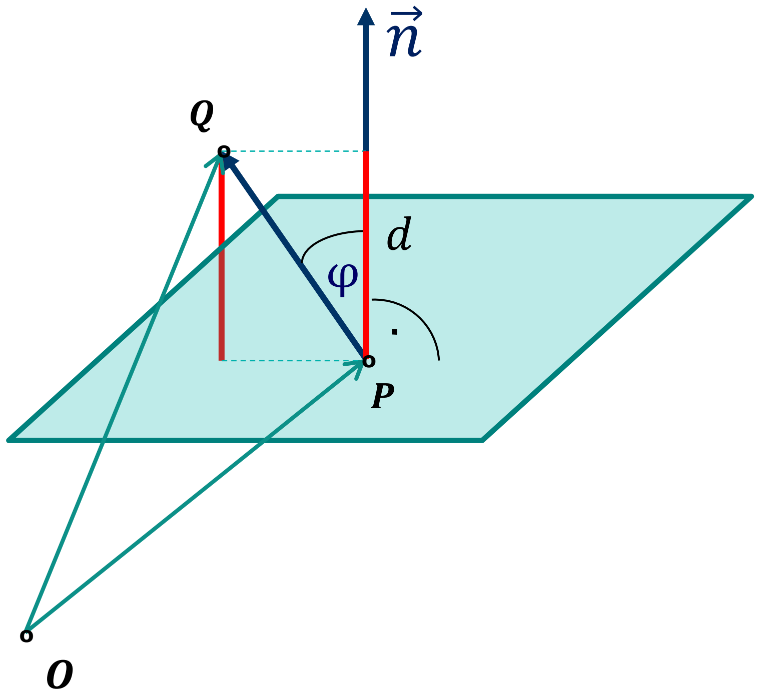
Gesucht: Abstand d des Punktes Q zur Ebene E.

Dann gilt:

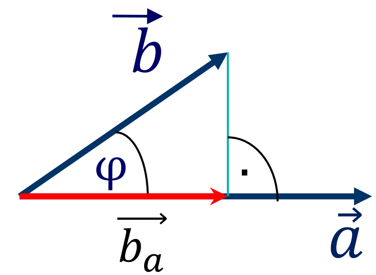
$$\boxed{d = \frac{\left|\vec{n} \cdot \left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right)\right|}{|\vec{n}|}}$$

Abstand $d(Q,E)$ des Punktes Q zur Ebene E

Herleitung:



Zur Erinnerung:



$$\left|\vec{b_a}\right| = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$$

Mit Hilfe des Skalarproduktes konnten wir die Länge der Projektion eines Vektors $\vec{b}$ auf einen Vektor $\vec{a}$ bestimmen (s.o.): $\left|\vec{b_a}\right| = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$

In unserem Fall entspricht der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ dem Vektor $\vec{b}$ und der Normalenvektor $\vec{n}$ entspricht dem Vektor $\vec{a}$.

D.h. wir erhalten $d = \left|\overrightarrow{PQ_n}\right| = \frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}|}{|\vec{n}|}$. Genau das wollten wir zeigen.

Vektorielle Darstellung einer Ebene

Ausblick auf die kommenden Aufgabentypen:

- Abstand Punkt - Ebene
- Abstand Gerade - Ebene
- Schnittgerade und Schnittwinkel zweier Ebenen
- Abstand zweier paralleler Ebenen
- Schnittgerade und Schnittwinkel zweier Ebenen

Abstand $d(g, E)$ der Geraden g zur Ebene E

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Definition:

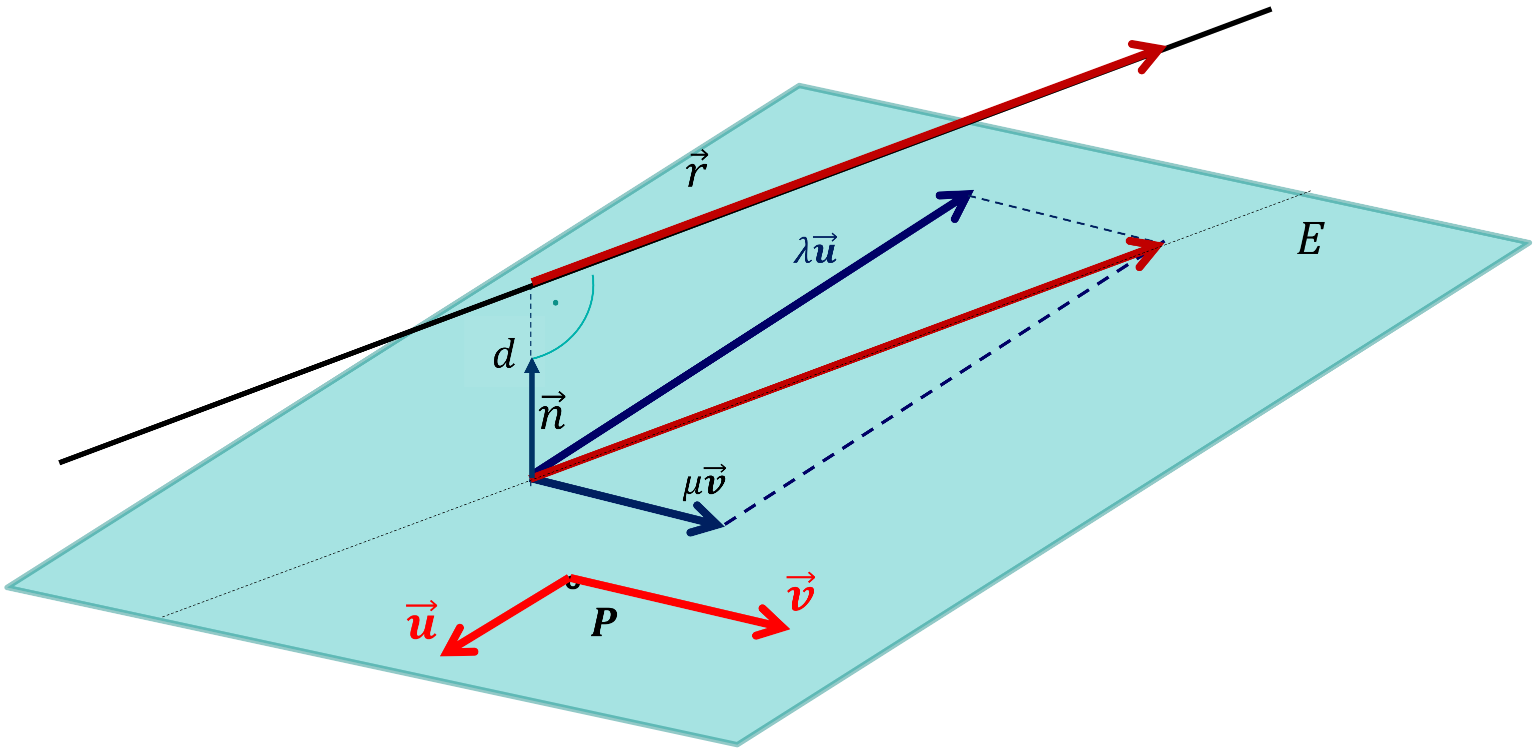
Der **Abstand** $\boldsymbol{d(g, E)}$ **einer Geraden** $\boldsymbol{g}$ **zu einer Ebene** $\boldsymbol{E}$ ist die Länge derjenigen Verbindungsstrecke von der Geraden zur Ebene, die zu der Geraden und zu der Ebene orthogonal ist.

Bemerkung:

Diese orthogonale Verbindungsstrecke ist die kürzeste von allen möglichen Verbindungsstrecken von der Geraden zur Ebene.

Wir schreiben für den Abstand $d(g, E)$ oder d, wenn der Bezug eindeutig ist.

Verhältnis einer Geraden g zu einer Ebene E



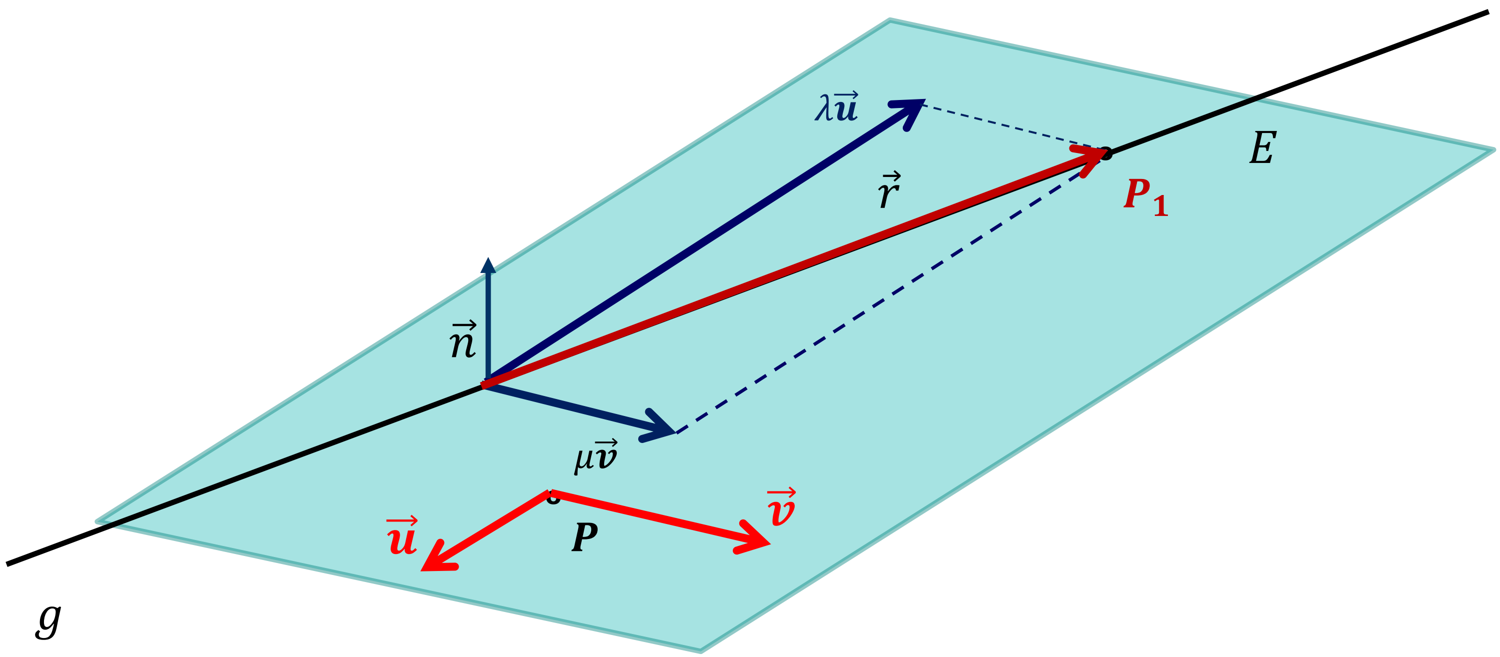
1. Die Gerade kann parallel zur Ebene liegen, aber nicht in ihr.

Es gilt Richtungsvektor $\vec{r} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ für ein bestimmtes λ und ein bestimmtes μ.

Damit gilt für den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene auch $\vec{r} \perp \vec{n}$, bzw. $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$.

Kein Punkt der Geraden ist ein Punkt der Ebene!

Verhältnis einer Geraden g zu einer Ebene E



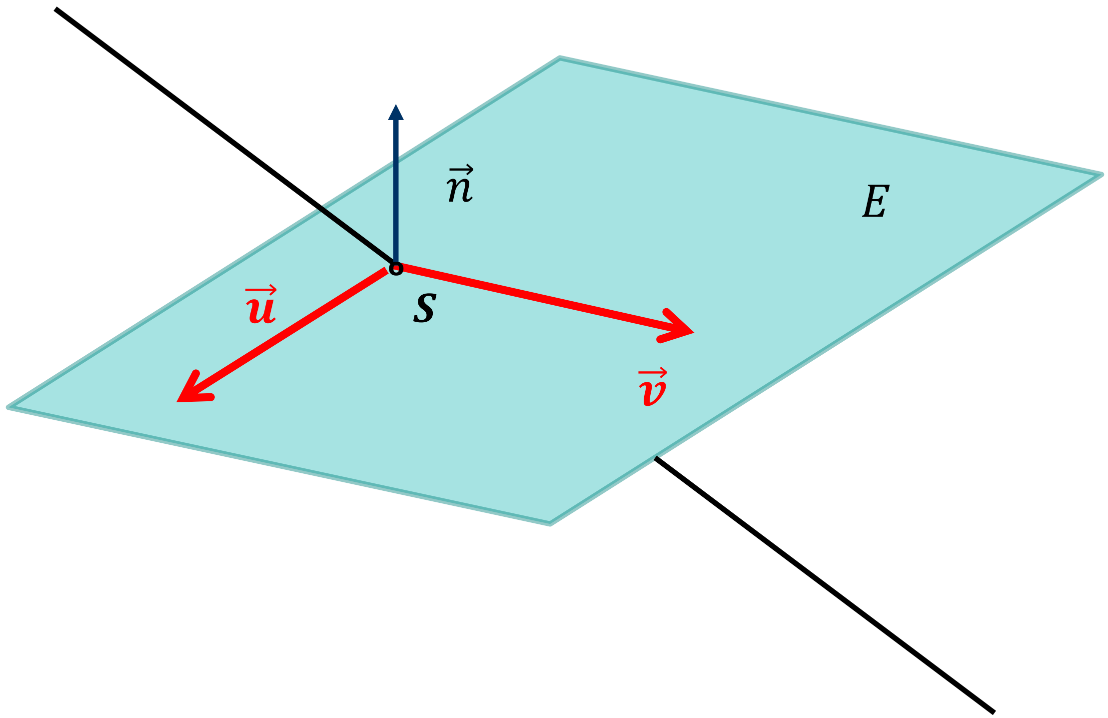
2. Die Gerade kann komplett in der Ebene liegen.

Es gilt Richtungsvektor $\vec{r} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ für ein bestimmtes λ und ein bestimmtes μ.

Damit gilt für den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene auch $\vec{r} \perp \vec{n}$, bzw. $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$.

Alle Punkt der Geraden sind Punkte der Ebene!

Schnittpunkt S und Schnittwinkel φ von g und E.



3. Jede Gerade, die nicht in der Ebene und nicht parallel zur Ebene liegt **muss die Ebene in einem gemeinsamen Punkt S schneiden!**

Damit gilt für den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene $\vec{r} \cdot \vec{n} \neq 0$.

Verhältnis einer Geraden g zu einer Ebene E

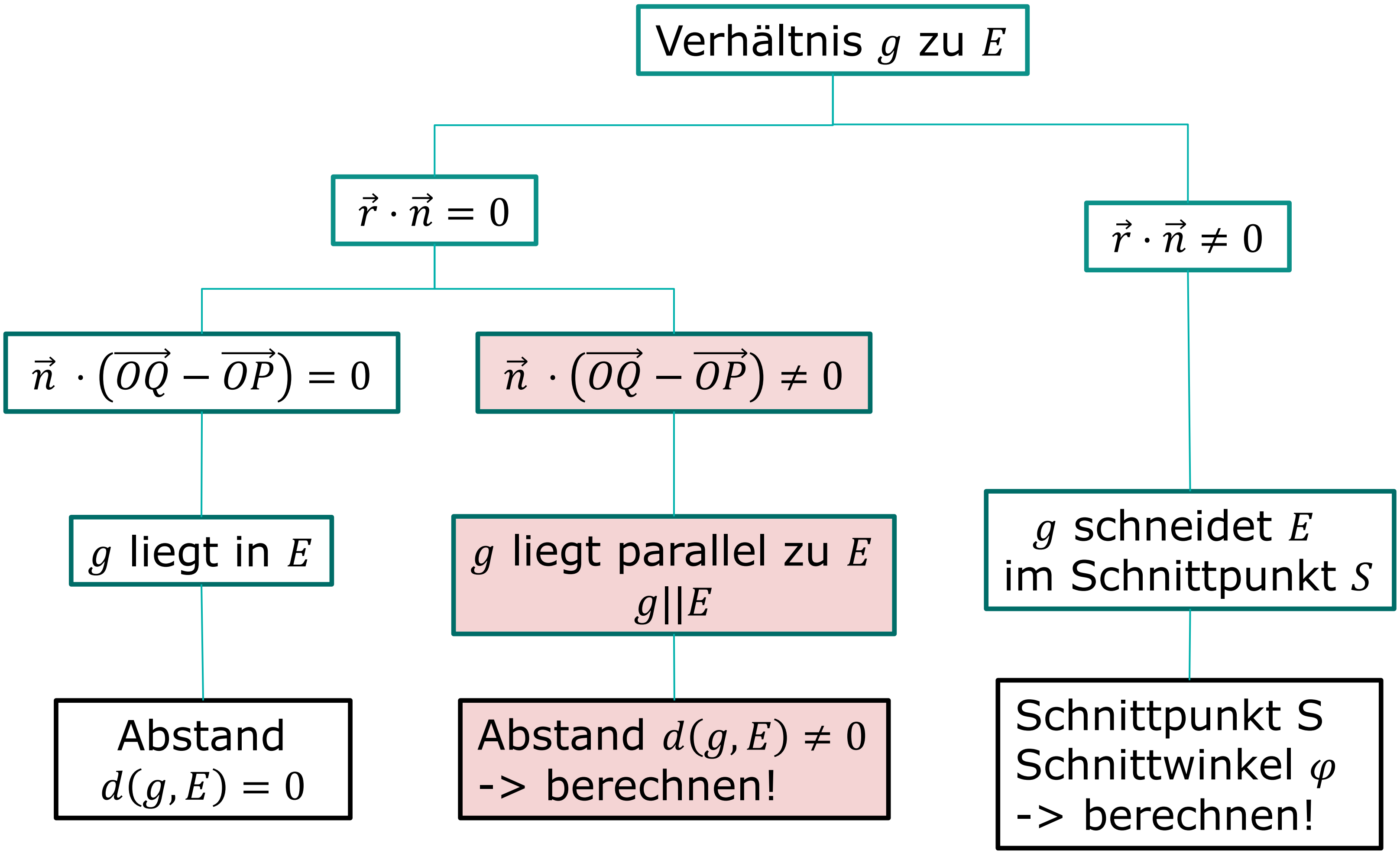
Gegeben: $g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + \lambda\vec{r},\ \ \lambda \in \mathbb{R}$ und $E\colon \vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \overrightarrow{OP}\right) = 0$.

Verhältnis g zu E

- $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$
  - $\vec{n} \cdot \left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right) = 0$
    - g liegt in E
      - Abstand $d(g, E) = 0$
  - $\vec{n} \cdot \left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right) \neq 0$
    - g liegt parallel zu E $g || E$
      - Abstand $d(g, E) \neq 0$ -> berechnen!
- $\vec{r} \cdot \vec{n} \neq 0$
  - g schneidet E im Schnittpunkt S
    - Schnittpunkt S, Schnittwinkel φ -> berechnen!

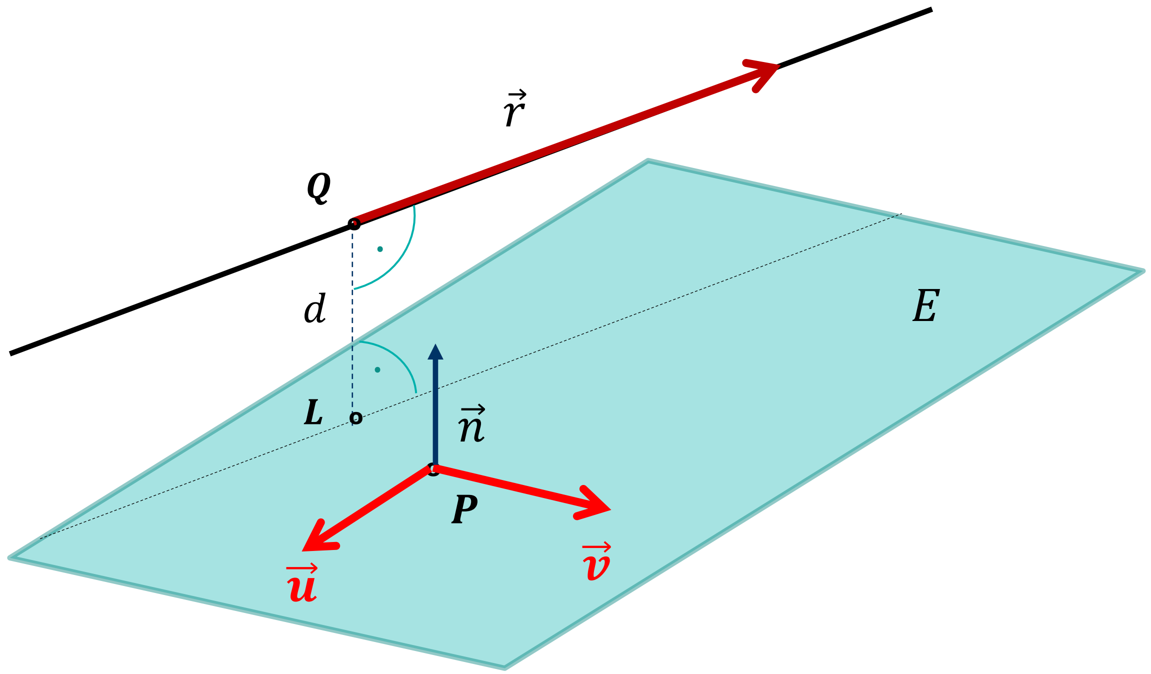
Verhältnis einer Geraden g zu einer Ebene E

Gegeben: $g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + \lambda\vec{r},\ \ \lambda \in \mathbb{R}$ und $E\colon \vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \overrightarrow{OP}\right) = 0$.



Abstand $d(g,E)$ im Fall g parallel zu E , $d.h.$ $g||E$

Gegeben: $g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + \lambda\vec{r},\ \ \lambda \in \mathbb{R}$ und $E\colon \vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \overrightarrow{OP}\right) = 0.$

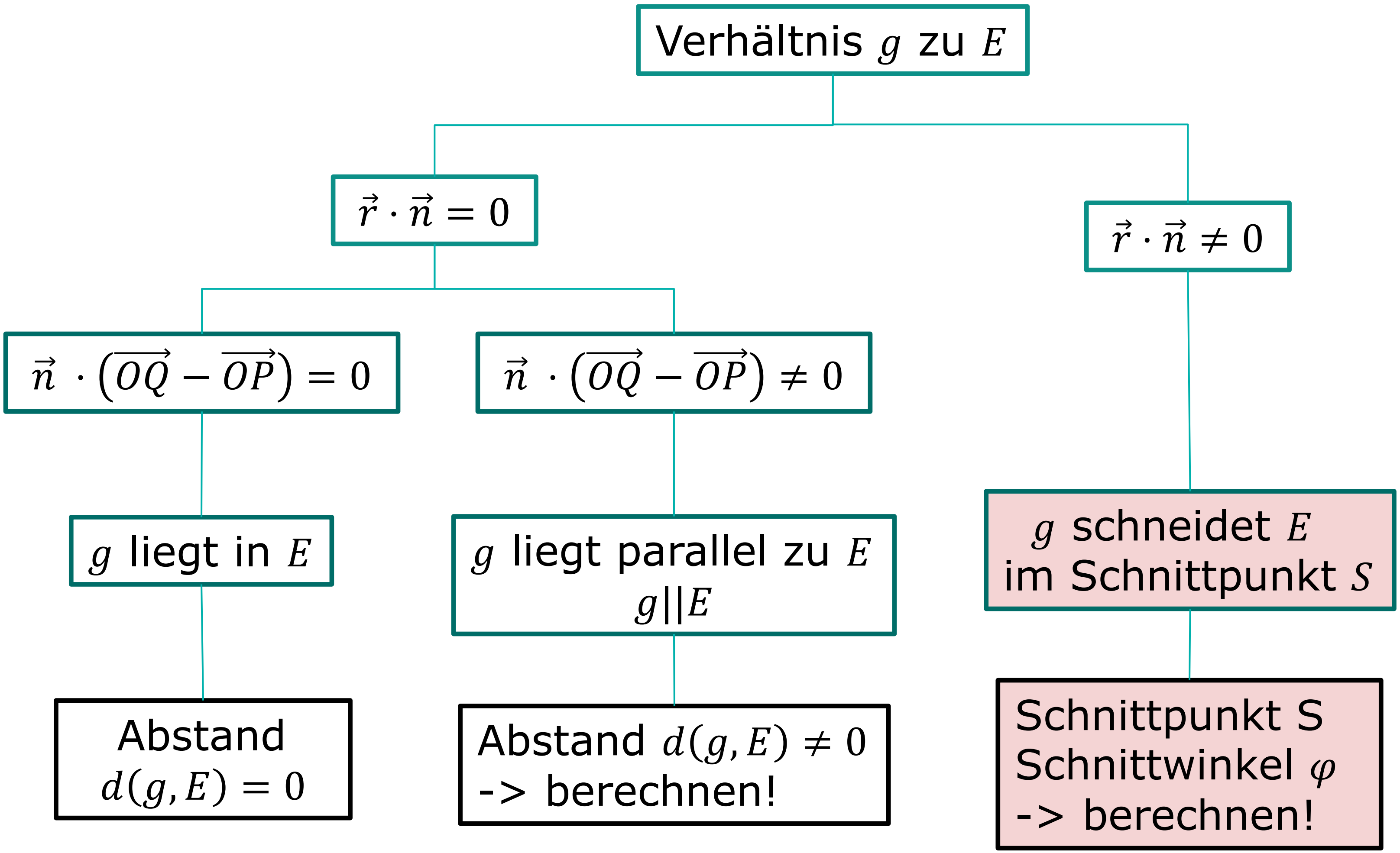


Gilt $g||E$, dann ist der Abstand der Geraden zur Ebene gleich dem Abstand eines beliebigen Punktes zur Ebene. Wir wählen für diesen Punkt Q und erhalten:

$$\boxed{d(g,E) = d(Q,E) = \frac{\left|\vec{n} \cdot \left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right)\right|}{|\vec{n}|}}$$

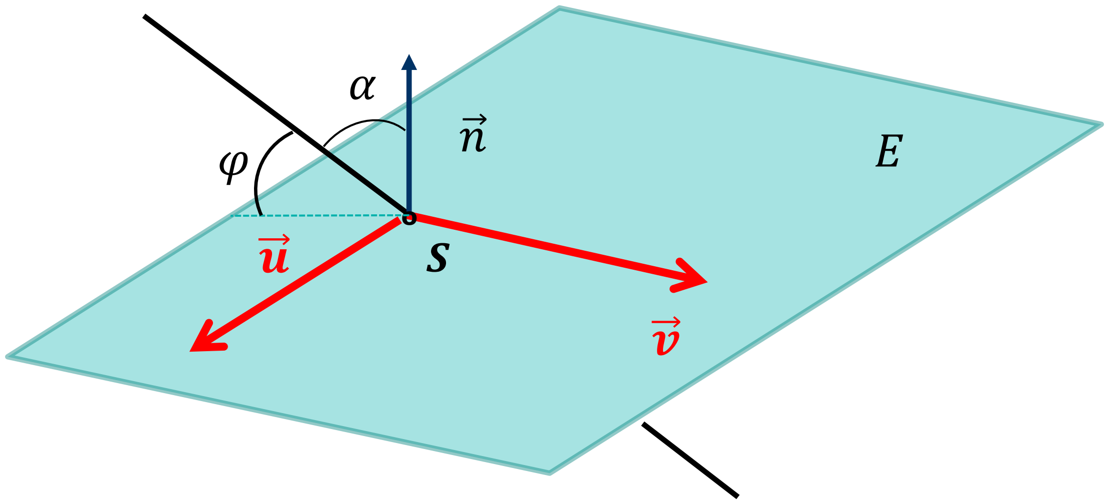
Verhältnis einer Geraden g zu einer Ebene E

Gegeben: $g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + \lambda\vec{r},\ \ \lambda \in \mathbb{R}$ und $E\colon \vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \overrightarrow{OP}\right) = 0$.



Schnittpunkt S und Schnittwinkel φ von g und E.

Gegeben: $g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + \lambda \vec{r},\ \lambda \in \mathbb{R}$ und $E\colon \vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \overrightarrow{OP}\right) = 0$.



Gesucht: Schnittpunkt S zwischen der Gerade g und der Ebene E.

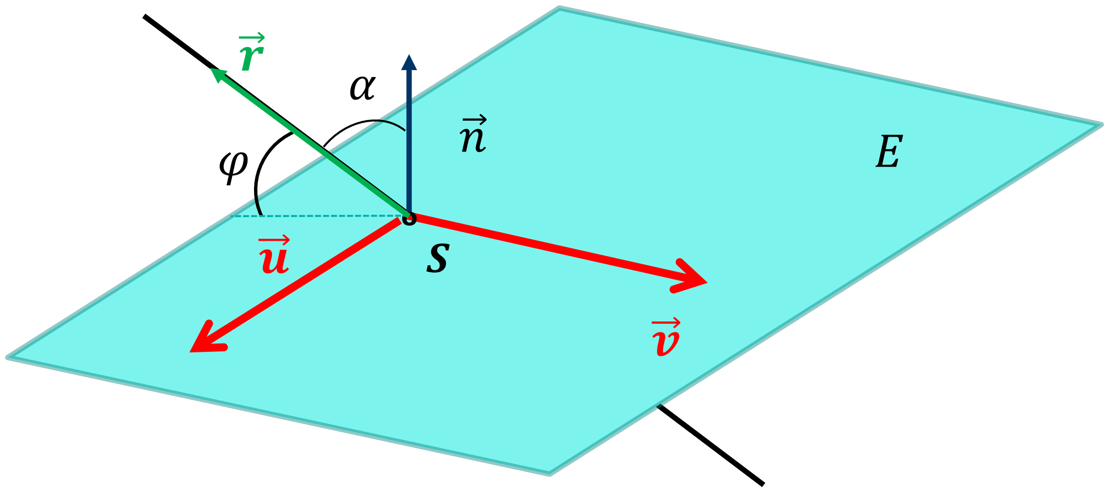
Der Ortsvektor $\overrightarrow{OS}$ des Schnittpunktes S erfüllt sowohl die Geradengleichung als auch die Gleichung der Ebene. Einsetzen liefert:

$$\vec{n} \cdot \left(\overrightarrow{OQ} + \lambda \vec{r} - \overrightarrow{OP}\right) = 0 \iff \lambda = \frac{\vec{n} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ})}{\vec{n} \cdot \vec{r}}$$

Damit ergibt sich: $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OQ} + \frac{\vec{n} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ})}{\vec{n} \cdot \vec{r}} \vec{r}$

Schnittpunkt S und Schnittwinkel φ von g und E.

Gegeben: g: $\vec{x} = \overrightarrow{OQ} + \lambda\vec{r},\ \lambda \in \mathbb{R}$ und E: $\vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \overrightarrow{OP}\right) = 0$.



Gesucht: Schnittwinkel φ zwischen der Gerade g und der Ebene E.

Es gilt $\varphi = 90° - \alpha$ sowie $\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{|\vec{n}||\vec{r}|}$

und $\cos(\alpha) = \cos(90° - \varphi) = \cos(\varphi - 90°) = \sin(\varphi)$

Damit ergibt sich: $\varphi = \arcsin\left(\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{r}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{r}\right|}\right)$

Verhältnis einer Geraden g zu einer Ebene E

Beispiel:

Gegeben: $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}$ und $E\colon \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$.

Untersuchen Sie, in welcher Beziehung die Gerade g und die Ebene E zueinander stehen.

Vektorielle Darstellung einer Ebene

Ausblick auf die kommenden Aufgabentypen:

- Abstand Punkt - Ebene
- Abstand Gerade - Ebene
- Schnittgerade und Schnittwinkel zweier Ebenen
- Abstand zweier paralleler Ebenen
- Schnittgerade und Schnittwinkel zweier Ebenen

Abstand $d(H, E)$ der Ebene H zur Ebene E

Definition:

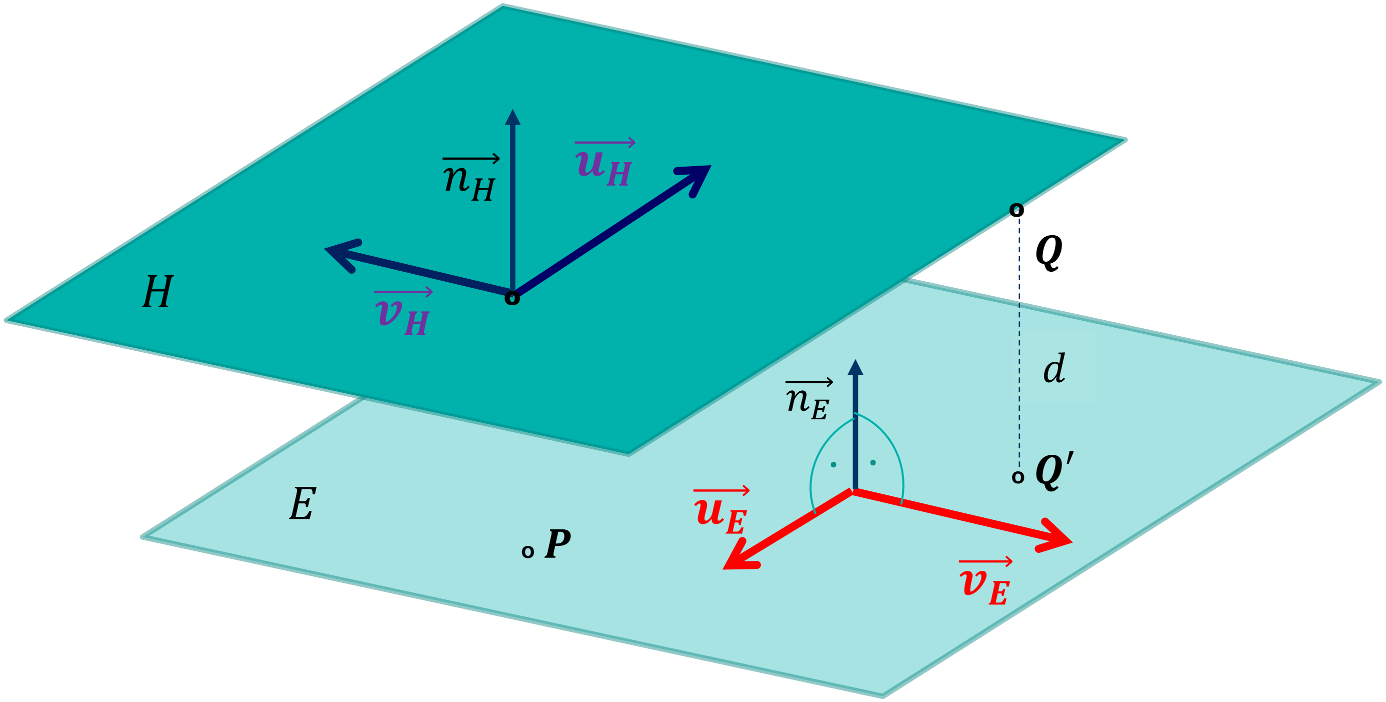
Der **Abstand** $\boldsymbol{d(H, E)}$ **zweier Ebenen** $\boldsymbol{E}$ **und** $\boldsymbol{H}$ ist die Länge derjenigen Verbindungsstrecke von der einen Ebene zur anderen, die auf beiden Ebenen senkrecht steht.

Bemerkung:

Diese orthogonale Verbindungsstrecke ist die kürzeste von allen möglichen Verbindungsstrecken zwischen den Ebenen.

Wir schreiben für den Abstand $d(H, E)$ oder d, wenn der Bezug eindeutig ist.

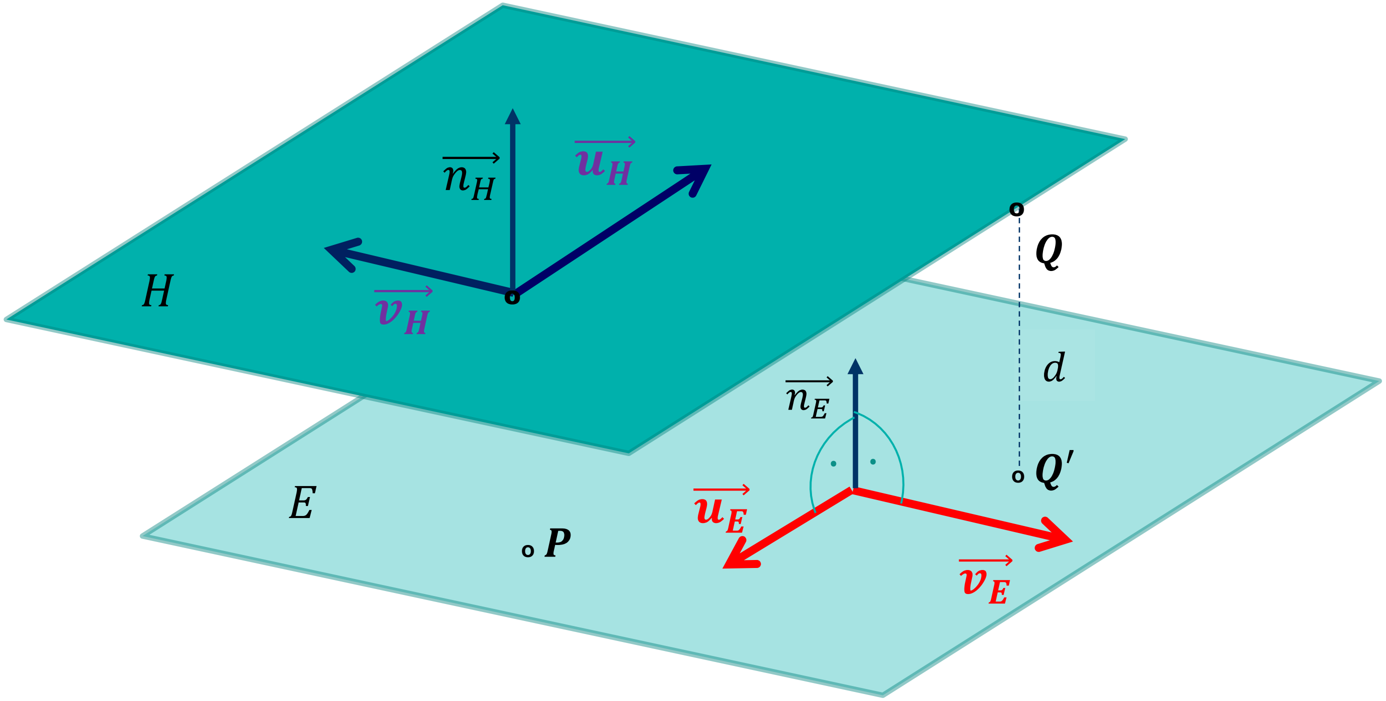
Abstand zweier paralleler Ebenen E und H



Liegen die beiden Ebenen ***E* und *H* parallel** zu einander, dann sind die Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_H}$ **kollinear** und jeder Punkt Q von H hat zu E den gleichen Abstand.

Damit ergibt sich $\quad d(E, H) = d(\mathrm{Q}, \mathrm{E}) = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_E} \cdot \left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{n_E}\right|}$

Abstand zweier paralleler Ebenen E und H



Bemerkung:

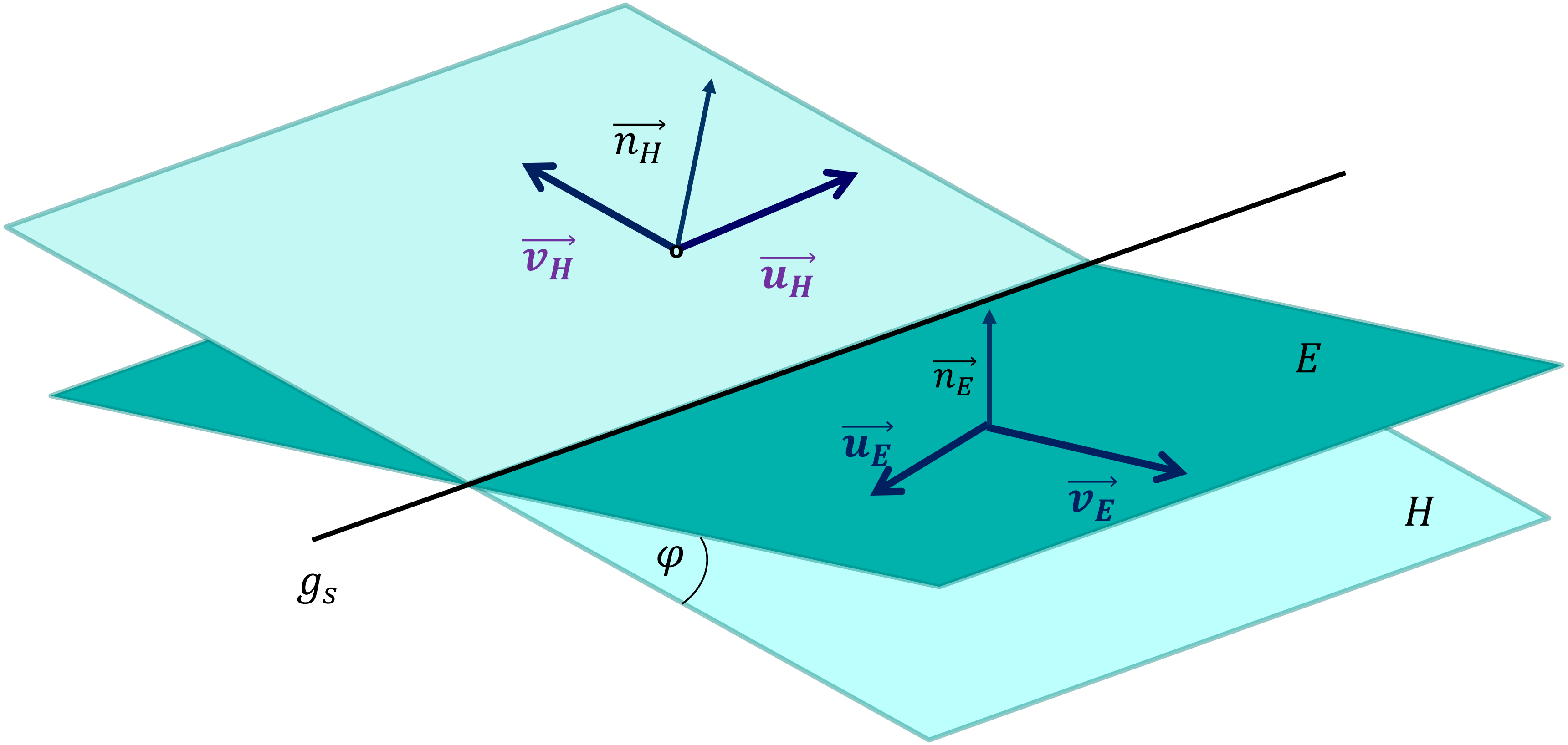
- Die Rollen von E und H sind vertauschbar.
- Gilt $d(E, H) = 0$, dann sind die beiden Ebenen identisch.

Vektorielle Darstellung einer Ebene

Ausblick auf die kommenden Aufgabentypen:

- Abstand Punkt - Ebene
- Abstand Gerade - Ebene
- Schnittgerade und Schnittwinkel zweier Ebenen
- Abstand zweier paralleler Ebenen
- Schnittgerade und Schnittwinkel zweier Ebenen

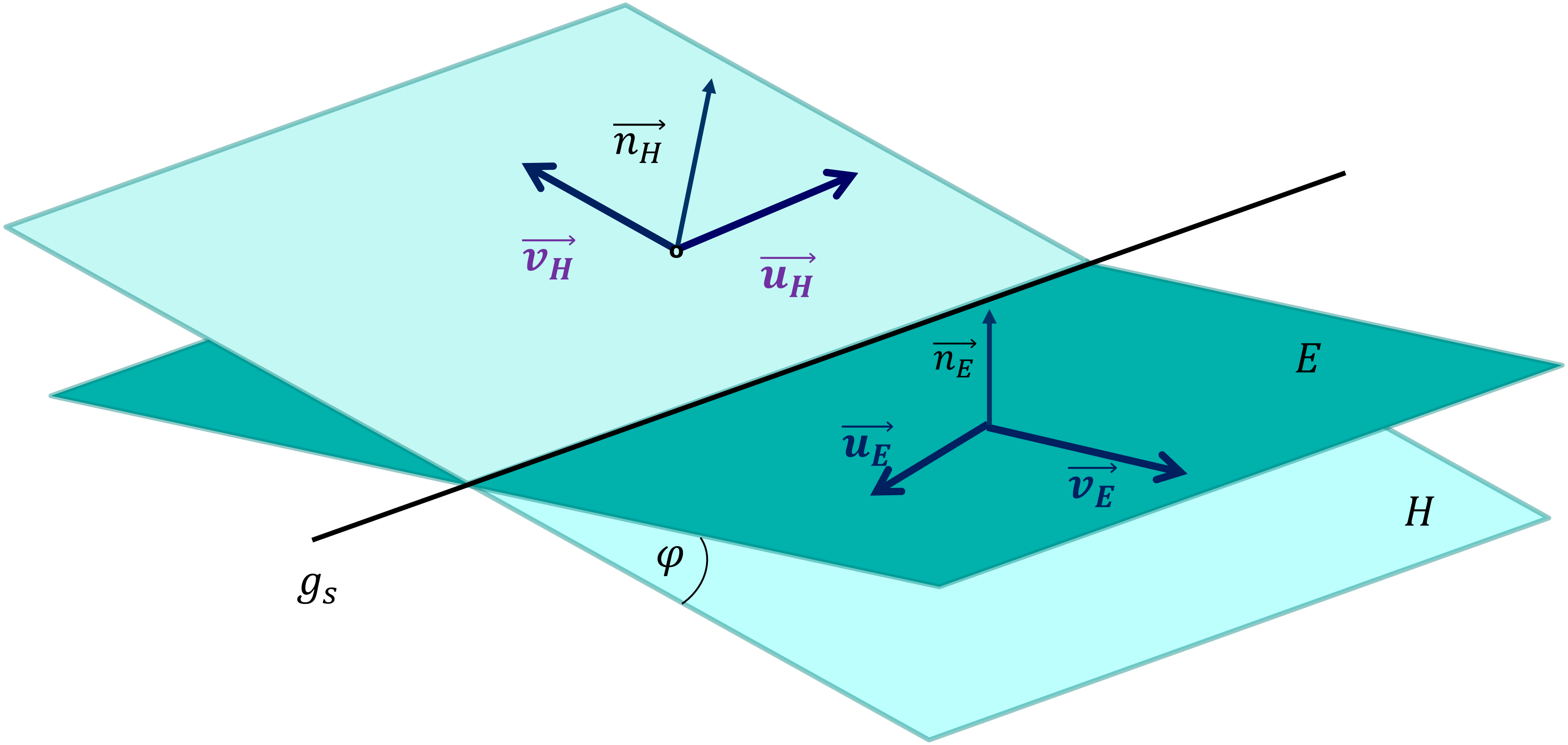
Verhältnis zwischen Ebenen in allgemeiner Lage



Sind zwei Ebenen E und H weder parallel noch identisch, dann müssen sie sich schneiden:

Das Schnittgebilde ist die **Schnittgerade g_s**.
Zwischen den Ebenen liegt der **Schnittwinkel φ**.

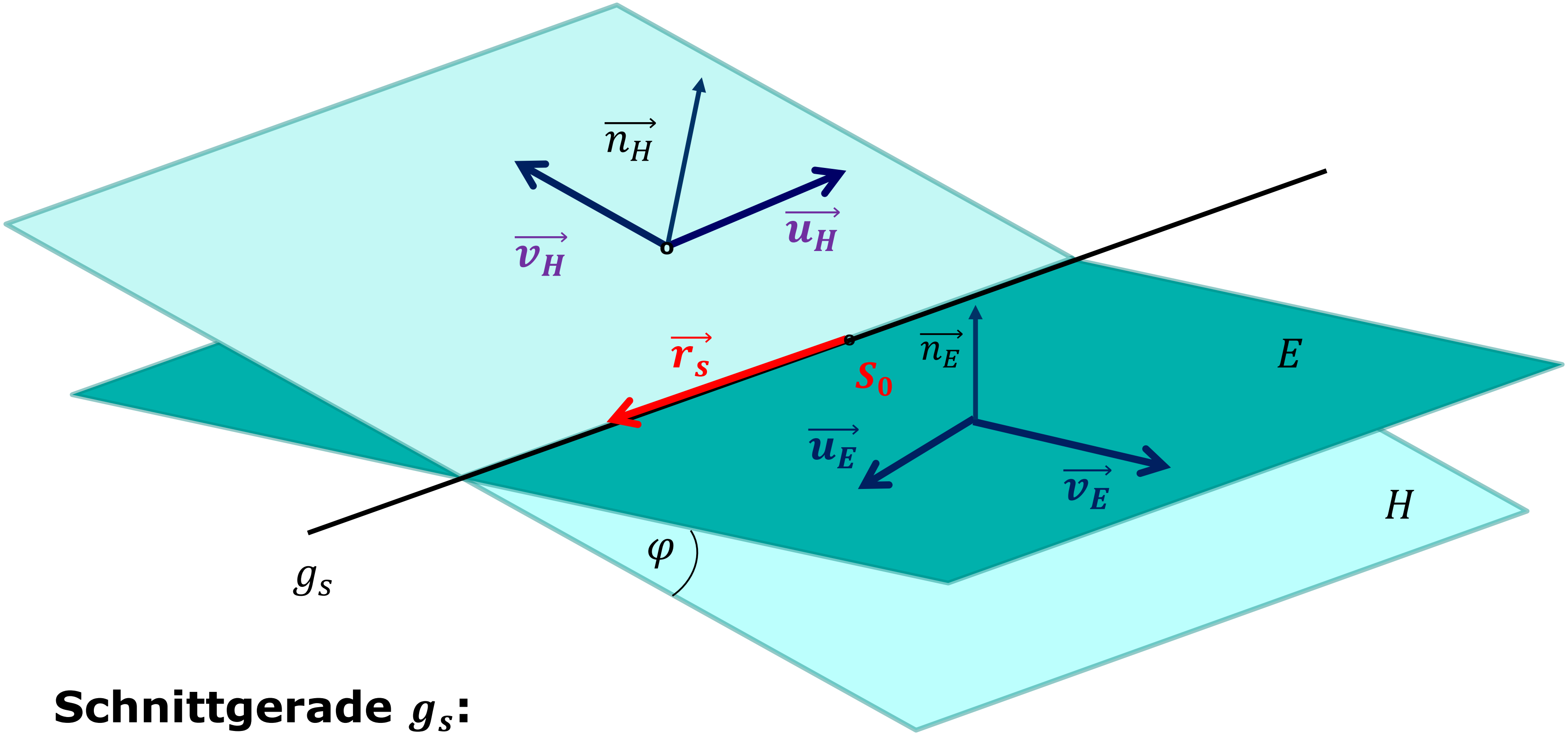
Verhältnis zwischen Ebenen in allgemeiner Lage



Zwei Ebenen E und H sind genau dann weder parallel noch identisch, wenn ihre Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_H}$ nicht kollinear sind.

Erinnerung: Das bedeutet $\overrightarrow{n_E} \times \overrightarrow{n_H} \neq 0$, bzw. $\overrightarrow{n_E} \neq k \cdot \overrightarrow{n_H}$ für alle $k \in \mathbb{R}$.

Verhältnis zwischen Ebenen in allgemeiner Lage

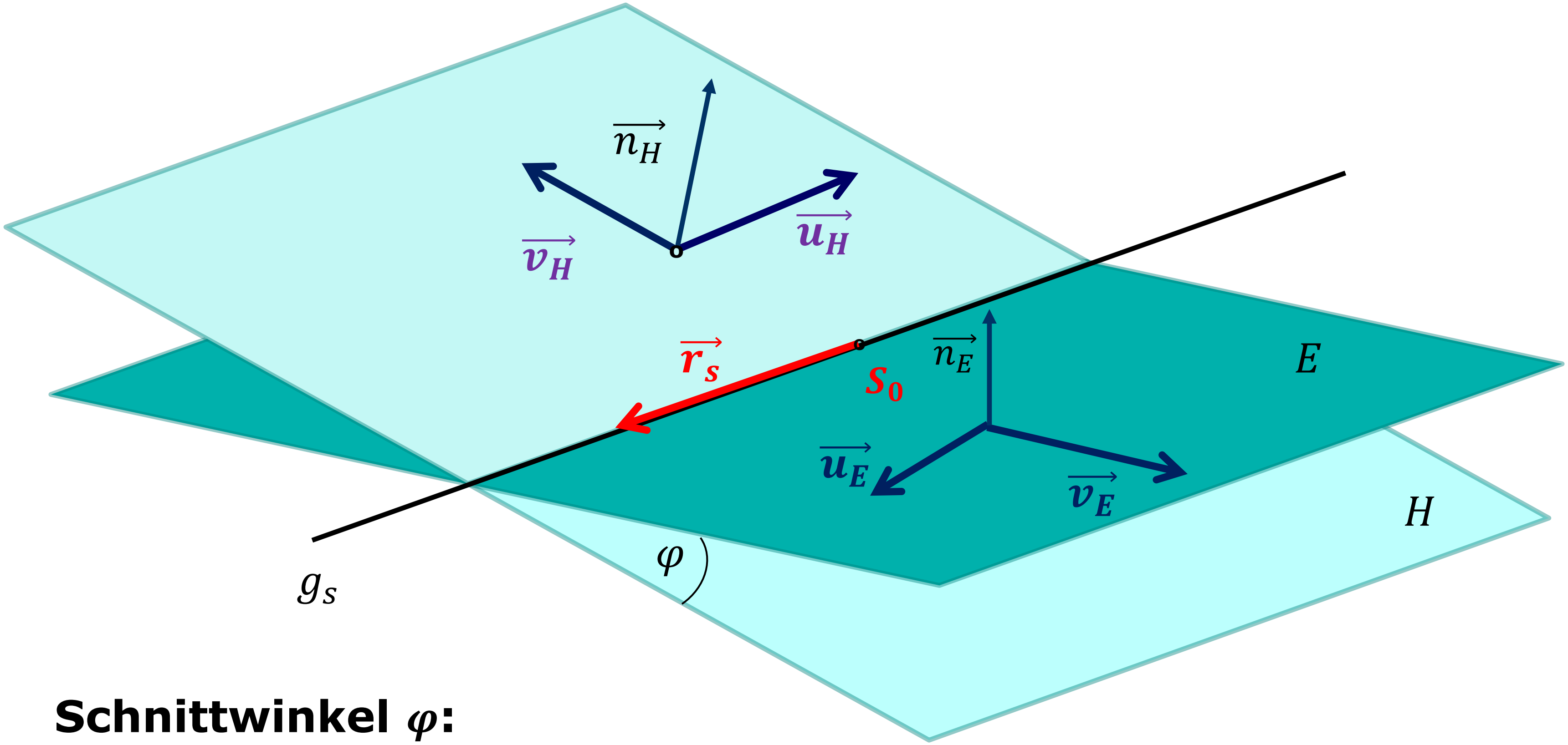


Schnittgerade g_s:

Wir brauchen einen **Punkt S_0**, der in beiden Ebenen liegt. Sein Ortsvektor wird der Stützvektor der Geraden –> Berechnung je nach gegebenen Ebenengleichungen siehe Beispiel/Praktikum

Der **Richtungsvektor** $\overrightarrow{r_s}$ steht senkrecht auf den Normalenvektoren.
Wir wählen z.B. $\overrightarrow{r_s} = \overrightarrow{n_E} \times \overrightarrow{n_H}$

Verhältnis zwischen Ebenen in allgemeiner Lage



Schnittwinkel $\boldsymbol{\varphi}$:

Der Schnittwinkel $\boldsymbol{\varphi}$ wiederholt sich zwischen den Normalenvektoren. Deshalb gilt:

$$\boldsymbol{\varphi} = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{n_E}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{n_H}}}{|\overrightarrow{\boldsymbol{n_E}}||\overrightarrow{\boldsymbol{n_H}}|}\right)$$