

Vektoralgebra

Achtung!

Dieses Folienskript soll den Studierenden einiges an mechanischer Schreibarbeit abnehmen und dazu beitragen, sich auf das eigentliche Fach und seine vielfältigen Themen konzentrieren zu können.

Es ersetzt keinesfalls eigene, ergänzende Notizen und Aufzeichnungen zu den Lehrinhalten, die während der Vorlesungen vermittelt werden.

Dieses Skript stellt kein Lehrbuch dar!
Nicht alles, was in der Vorlesung erarbeitet wird,
ist im Skript enthalten.

Definition: Reelle Vektoren

Vektoren sind Größen, die durch

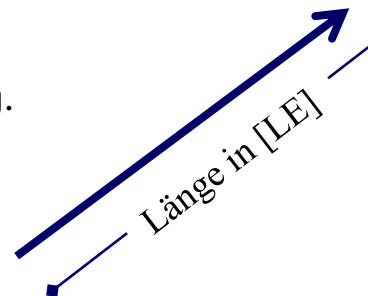
- ihren **Betrag**
- eine **Richtungsangabe**

bestimmt sind.

Das geometrisch Bild eines Vektors ist ein Pfeil mit der Richtung des Vektors.

Die Länge des Pfeils entspricht dem Betrag des Vektors.

Ein Vektor dargestellt als Pfeil mit Richtung.



Beispiele für Vektoren sind z.B. aus der Mechanik

Kraft (\vec{F}), Geschwindigkeit (\vec{v}),
Beschleunigung (\vec{a}), Impuls (\vec{p})

Im Zusammenhang mit Vektoren nennt man Zahlen,
bzw. Größen, die durch einen Zahlenwert ohne Richtung
charakterisiert werden, **Skalare**.

Beispiele für Skalare sind z.B.

Masse (m), Temperatur (T), Zeit (t)

Vektoralgebra: Bezeichnungen



Repräsentant eines Vektors

\vec{a}

Bezeichnung eines Vektors

\overrightarrow{PQ}

Bezeichnung eines Vektors mit
Anfangspunkt P und Endpunkt Q

$|\vec{a}|$

Betrag des Vektors \vec{a} .
Es ist immer $|\vec{a}| \geq 0$.

\vec{e}_x

Einheitsvektor der Länge 1 in
x-Richtung

- Freie Vektoren dürfen im Raum beliebig (aber nur) parallel zu sich selbst verschoben werden.
- Linienflüchtige Vektoren dürfen ausschließlich entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden.
- Gebundene Vektoren werden von einem festen Punkt aus abgetragen, z.B. der so genannte Ortsvektor \overrightarrow{OP} des Punktes P

Vektoralgebra: Bezeichnungen

- Ortsvektor \overrightarrow{OP} eines Punktes P ist ein spezieller gebundener Vektor. (Er wird vom Ursprung des Koordinatensystems bis zum Punkt P abgetragen.)
- Nullvektor $\vec{0}$ - Vektor der Länge Null. Dieser Vektor hat folglich auch keine Richtung.
- Einheitsvektor \vec{e} / normierter Vektor \vec{n}_e Vektor mit Länge/Betrag Eins

- $\vec{a} = \vec{b}$ Zwei Vektoren sind **gleich**, wenn sie in Betrag und Richtung übereinstimmen.
- $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ Zwei Vektoren sind **parallel**, wenn sie in ihrer Richtung übereinstimmen.
- $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ Zwei Vektoren sind **antiparallel**, wenn sie entgegengesetzte Richtungen haben.
- $\vec{a} = -\vec{b}$ \vec{b} ist der **Gegenvektor** von \vec{a} , wenn gilt $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ und $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.
- \vec{a} und \vec{b} heißen kollinear, wenn sie parallel oder antiparallel sind.

Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl

Die Multiplikation eines Vektors \vec{a} mit einer reellen Zahl λ ergibt einen neuen Vektor \vec{b} mit folgenden Eigenschaften:

1. $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \lambda$

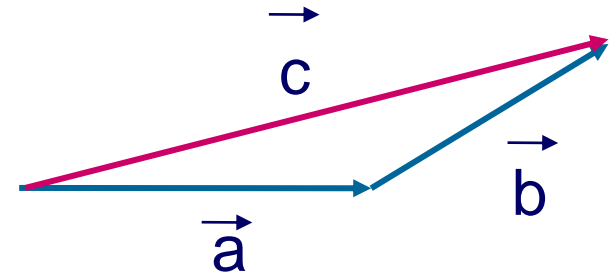
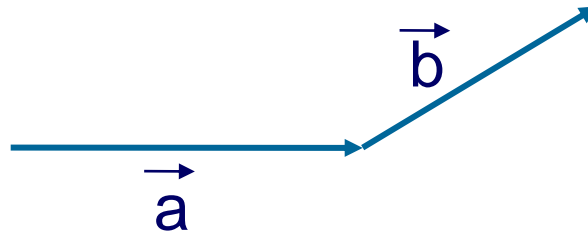
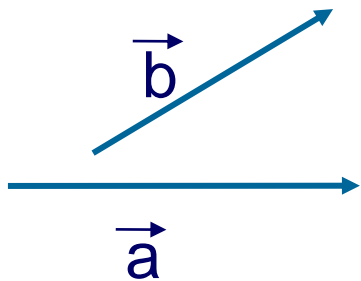
2. $|\vec{b}| = |\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

3. $[\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}, \text{ falls } \lambda > 0]$ und $[\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}, \text{ falls } \lambda < 0]$

Vektoraddition – geometrisch

Gegeben: Vektor \vec{a} und Vektor \vec{b}

Gesucht: Vektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$



Parallelverschiebung
bis Anfangspunkt \vec{b}
= Endpunkt \vec{a}

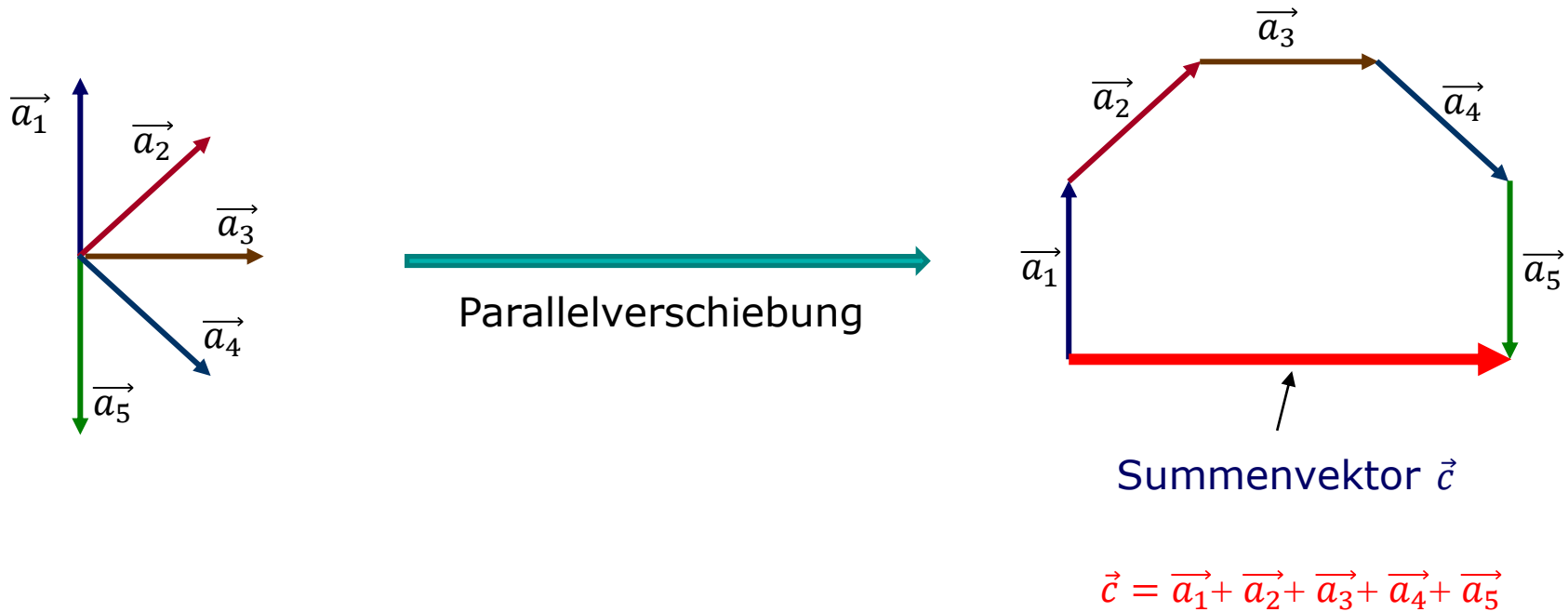
Vektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ geht vom
Anfangspunkt von \vec{a} zum
Endpunkt von \vec{b} .

Kommutativgesetz: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Assoziativgesetz: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

Vektoraddition – geometrisch

Addition mehrerer Vektoren:



Vektoralgebra: Komponentendarstellung

Um mit Vektoren rechnen und arbeiten zu können, müssen wir die Begriffe Richtung und Betrag des Vektors durch Zahlen ausdrücken.

Das geschieht mit Hilfe der so genannten

Komponentendarstellung.

Dazu beschreiben wir

1. den Raum in dem die Vektoren „leben“ durch ein passendes Koordinatensystem.
2. die Komponenten des Vektors in Richtung der Koordinatenachsen.

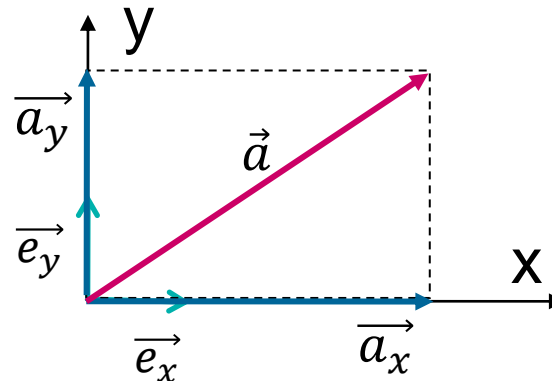
Vektoren im zweidimensionalen Raum \mathbb{R}^2

1. Koordinatensystem: Der \mathbb{R}^2 entspricht dem bekannten Koordinatensystem mit x - und y -Achse
2. Angabe der Komponenten (Anteile) des Vektors in Richtung der x - bzw. y -Achse mit Hilfe von \vec{e}_x und \vec{e}_y .

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad \vec{a}_x = a_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_y = a_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

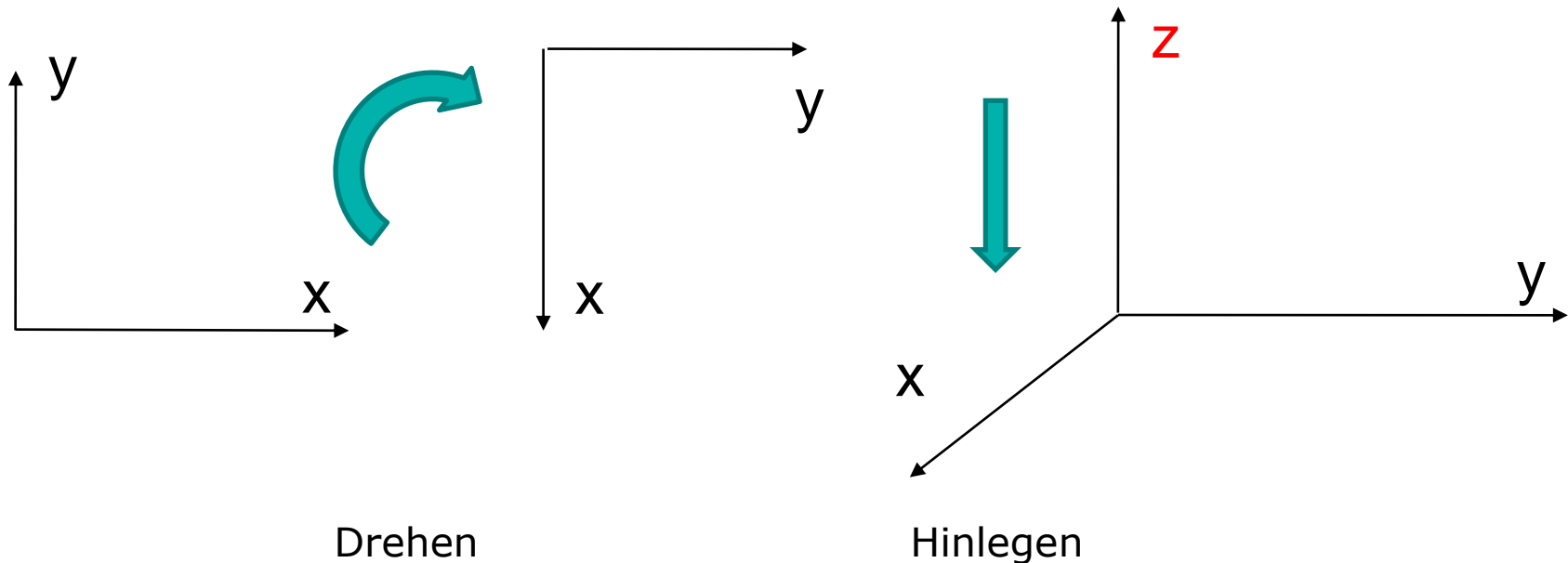
$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y$$

$$= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$



Vektoren im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3

1. Koordinatensystem: Der \mathbb{R}^3 besteht aus dem bekannten Koordinatensystem mit x - und y -Achse.
Eine dritte Achse, die z -Achse kommt hinzu!



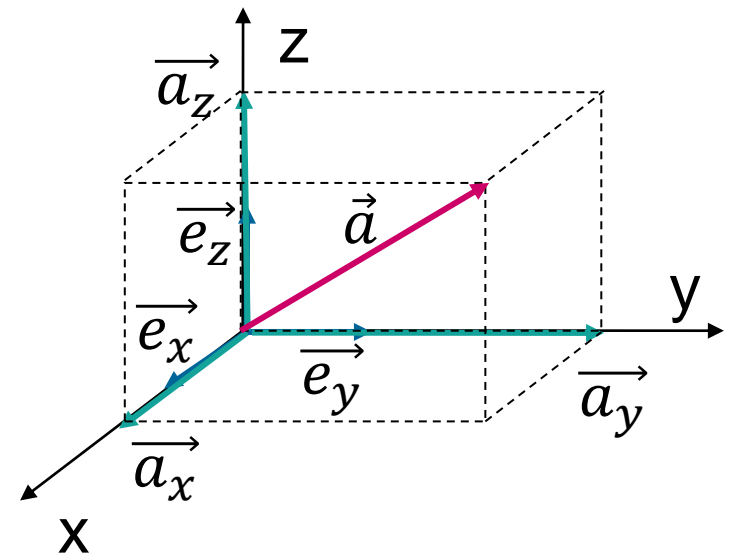
(Dieses Koordinatensystem ist ein Rechtssystem.)

Vektoren im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3

2. Angabe der Komponenten (Anteile) des Vektors in Richtung der x - bzw. y -Achse und der z -Achse mit Hilfe von \vec{e}_x , \vec{e}_y und \vec{e}_z .

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \\ &= \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \\ &= \begin{pmatrix} a_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$



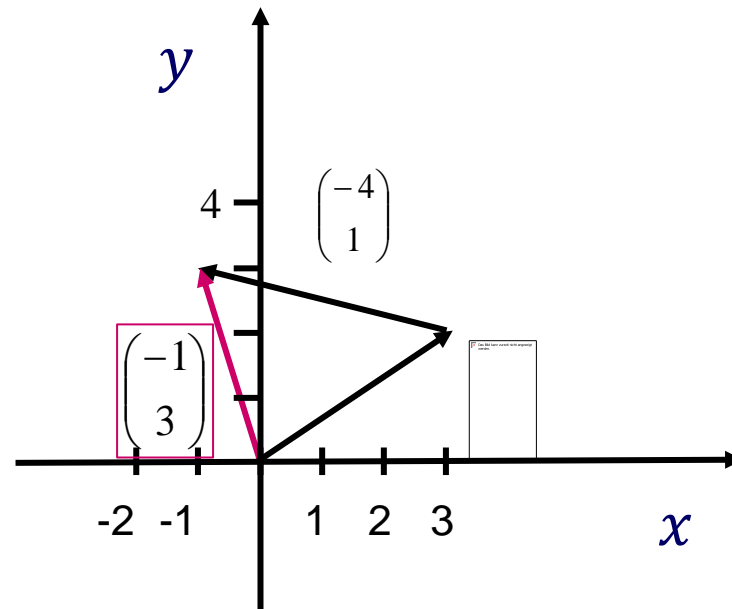
Addition - Komponentenschreibweise

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

Analog für Vektoren des \mathbb{R}^2 .

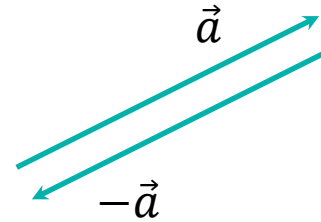
Ein Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Addition – Komponentenschreibweise

Der Gegenvektor $-\vec{a}$ des Vektors \vec{a} ist definitionsgemäß genauso lang wie \vec{a} und antiparallel.



Damit gilt:

- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

- $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \Leftrightarrow -\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \\ -a_z \end{pmatrix}$

- Die Subtraktion eines Vektors erklärt sich als Addition des Gegenvektors: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

Komponentendarstellung eines durch zwei Punkte festgelegten Vektors

Gegeben: Die Punkte $P_1(x_1 | y_1 | z_1)$ und $P_2(x_2 | y_2 | z_2)$.
Gesucht: Der Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$.

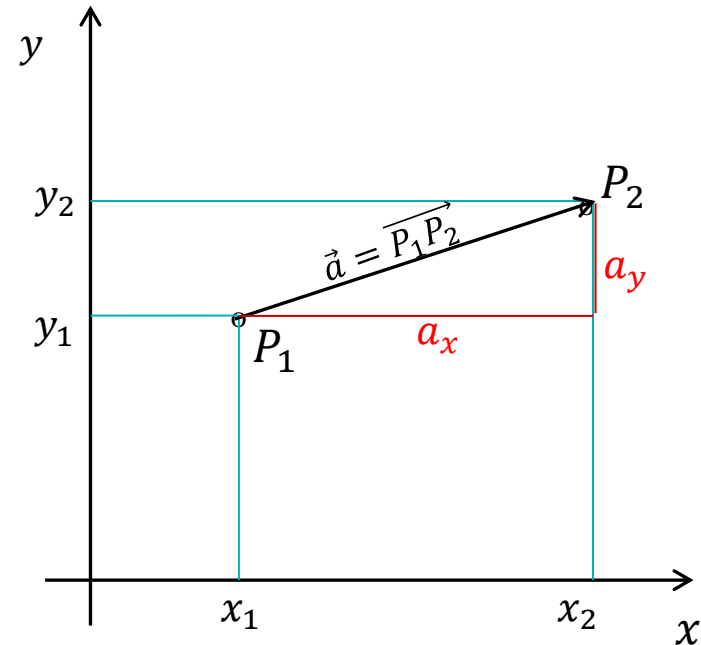
Der Skizze entnehmen wir:

$$a_x = x_2 - x_1$$

$$a_y = y_2 - y_1$$

D.h. für den gesuchten Vektor ergibt sich

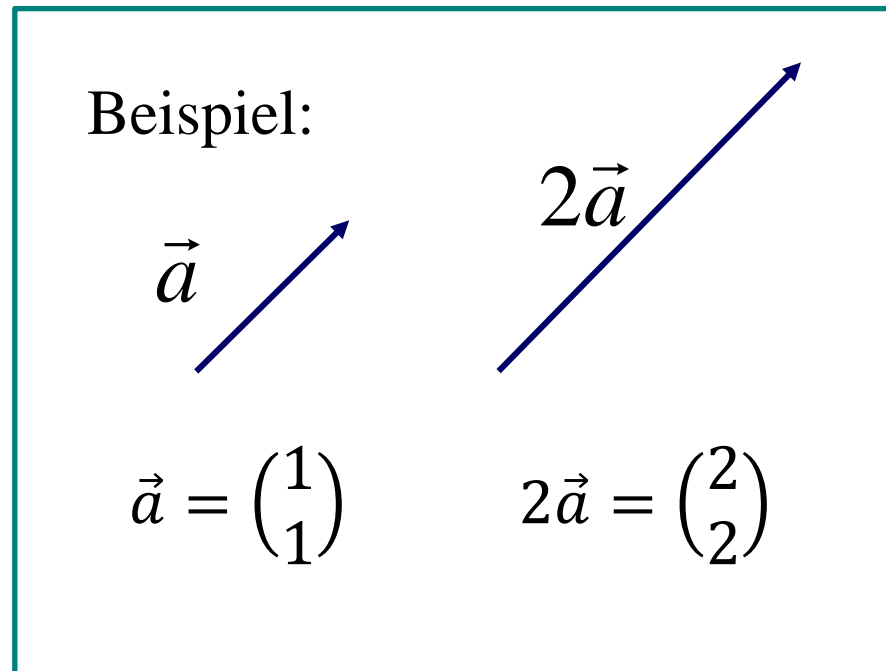
$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$



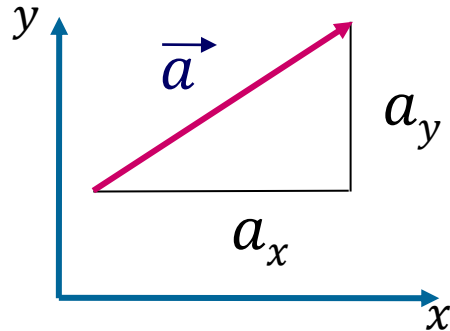
Für Vektoren des \mathbb{R}^3 gilt natürlich analog: $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$

Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl

$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_x \\ \lambda \cdot a_y \\ \lambda \cdot a_z \end{pmatrix}$$

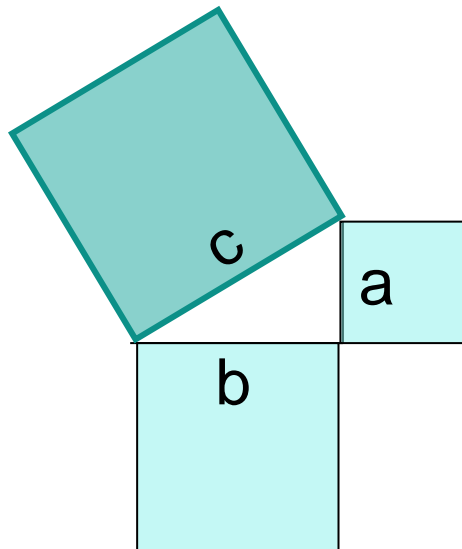


Betrag eines zweidimensionalen Vektors



Betrag = Länge des Vektors

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}$$



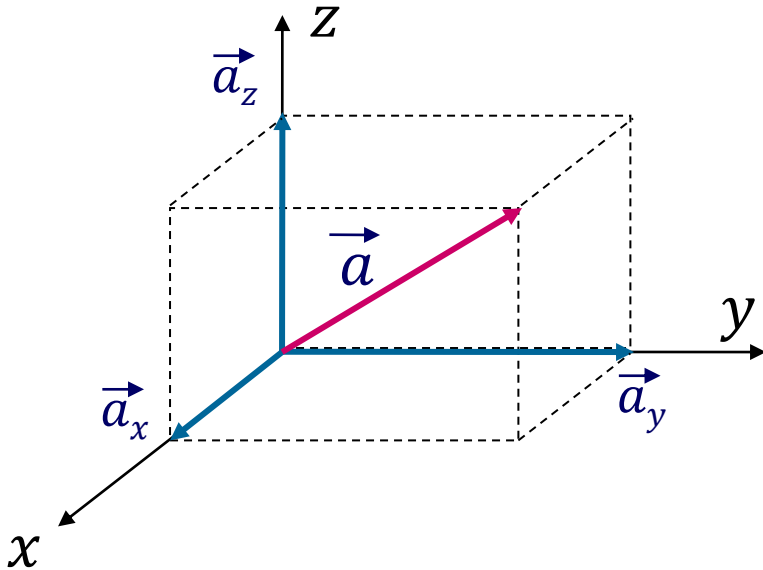
Satz des Pythagoras

„Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse.“

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Betrag eines dreidimensionalen Vektors



$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2}$$

Normierung eines Vektors

Durch Normierung eines Vektors erhält man aus einem Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ einen Einheitsvektor der gleichen Richtung.

$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$$

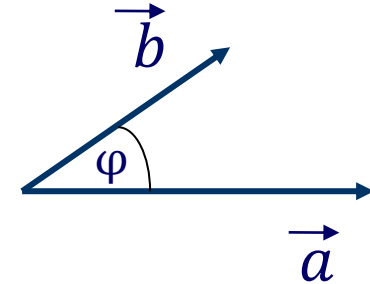
Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$

$$\Rightarrow \vec{e}_a = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt zweier Vektoren

Definition: Skalarprodukt zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b}

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$



wobei $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ der (kleinere) zwischen den Vektoren eingeschlossene Winkel ist.

Bemerkungen:

- Das Skalarprodukt kann für zwei Vektoren des \mathbb{R}^3 gebildet werden, genau wie für zwei Vektoren des \mathbb{R}^2 .
- Das Skalarprodukt ist eine Multiplikation der Beträge zweier Vektoren unter Berücksichtigung der Richtungsabhängigkeit der Vektoren.
- **Das Ergebnis des Skalarproduktes ist immer ein Skalar!**

Für das Skalarprodukt gilt

- Kommutativgesetz: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- Distributivgesetz: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b})$

Die Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind **orthogonal**, bzw. stehen senkrecht aufeinander, genau dann, wenn

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Die Vektoren \vec{a} und \vec{b} sind **parallel** genau dann, wenn

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

Insbesondere gilt

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1, \quad \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = 1, \quad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1,$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0, \quad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0, \quad \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = 0.$$

Skalarprodukt und Komponentendarstellung

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ mit $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

Dann gilt
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Und völlig analog im \mathbb{R}^2 :

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ mit $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$.

Dann gilt
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

Winkel zwischen zwei Vektoren

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ oder $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

wobei φ der (kleinere) zwischen den Vektoren eingeschlossene Winkel ist. Daraus ergibt sich für $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

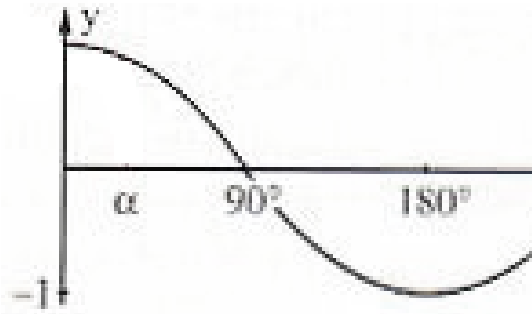
und damit

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Winkel zwischen zwei Vektoren

Bemerkung:

Für $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ gilt $\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.



Damit ergibt sich:

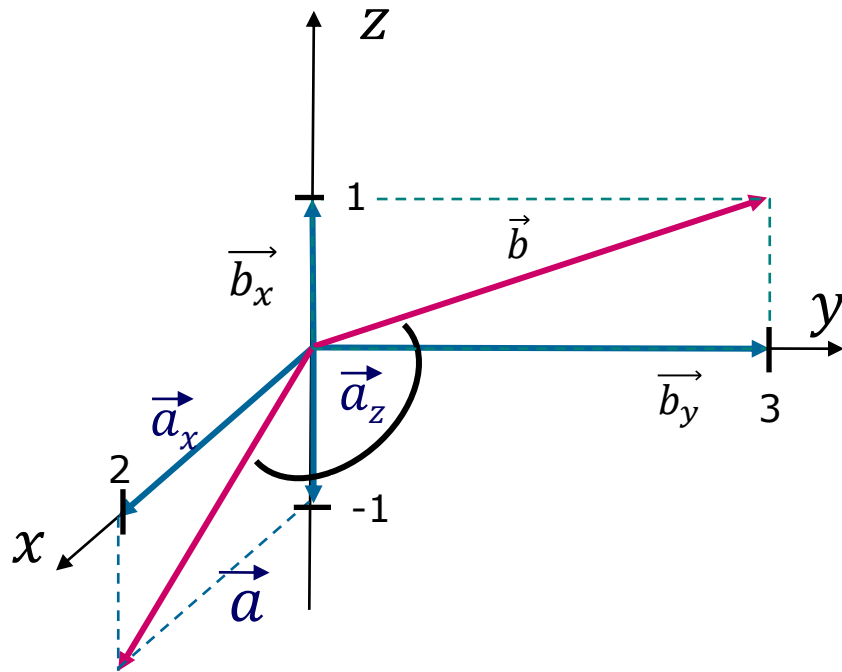
$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Rightarrow \cos(\varphi) > 0 \Rightarrow 0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Rightarrow \cos(\varphi) < 0 \Rightarrow 90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \cos(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$$

Winkel zwischen zwei Vektoren

Ein Beispiel:

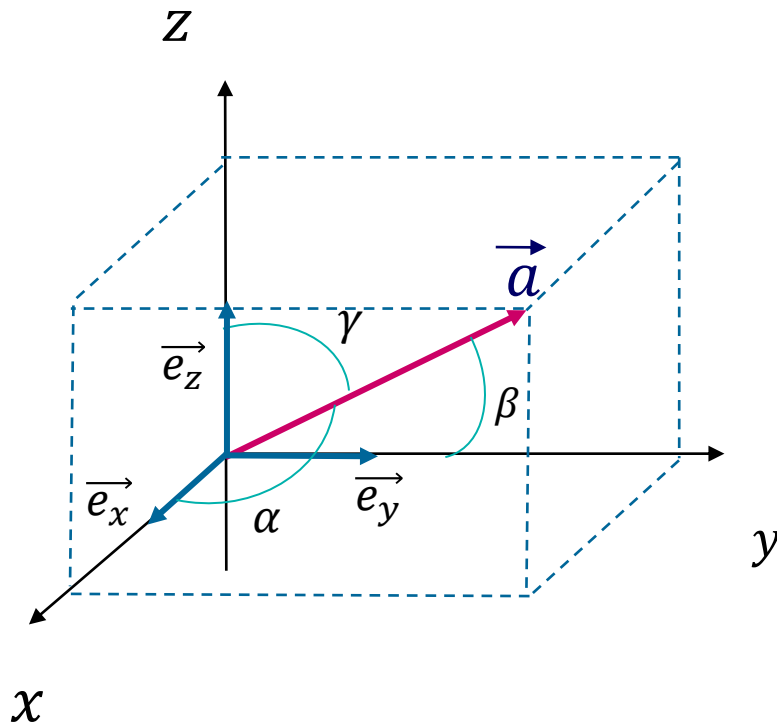


$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 1}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{9+1}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}}\right) \\ &= \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right) \\ &= 98,13^\circ \end{aligned}$$

Richtungswinkel eines Vektors

Die **Richtungswinkel** eines Vektors \vec{a} sind die Winkel zwischen \vec{a} und den Achsen, bzw. den Einheitsvektoren \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z .



Winkel zwischen \vec{a} und der x -Achse:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_x}{|\vec{a}|} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_x}{|\vec{a}|}\right)$$

Winkel zwischen \vec{a} und der y -Achse:

$$\cos(\beta) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_y}{|\vec{a}|} \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_y}{|\vec{a}|}\right)$$

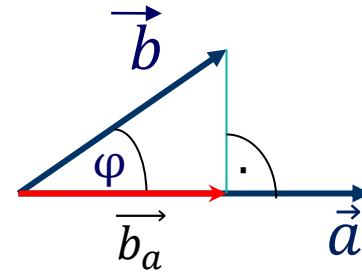
Winkel zwischen \vec{a} und der z -Achse:

$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_z}{|\vec{a}|} \Rightarrow \gamma = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_z}{|\vec{a}|}\right)$$

Es gilt immer:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

Projektion eines Vektors \vec{b} auf einen Vektor \vec{a} :



- Durch die (senkrechte) Projektion des Vektors \vec{b} auf den Vektor \vec{a} entsteht der Vektor $\vec{b}_a \uparrow \vec{a}$.
- Für die Länge von \vec{b}_a gilt: $|\vec{b}_a| = |\vec{b}| \cos \varphi$
- Wegen $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ gilt: $|\vec{b}_a| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$
- Damit ergibt sich
$$\vec{b}_a = |\vec{b}_a| \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

(denn $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ist der Einheitsvektor in Richtung \vec{a} .)

Vektorprodukt zweier Vektoren

Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} erzeugt einen neuen Vektor \vec{c} , der senkrecht auf \vec{a} und \vec{b} steht:

Man sagt: „ \vec{c} ist das Vektorprodukt von \vec{a} und \vec{b} .“

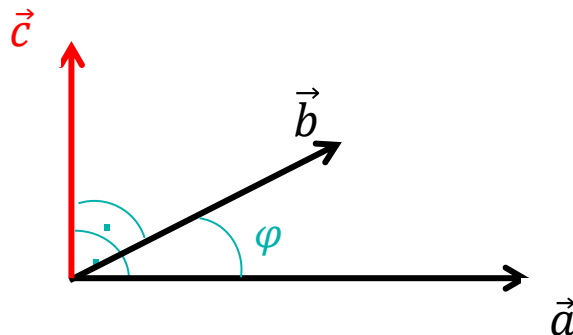
Man schreibt: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

Vektorprodukt zweier Vektoren

Geometrische Definition: Vektorprodukt

Seien \vec{a} und \vec{b} beliebige Vektoren des \mathbb{R}^3 , dann gilt:

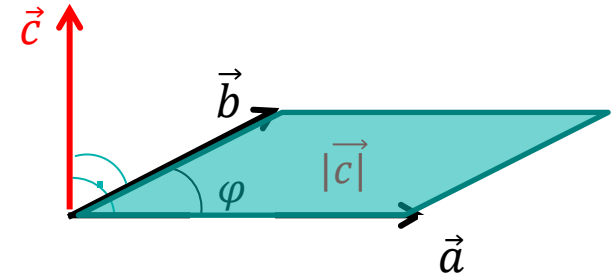
- Der Vektor \vec{c} ist sowohl zu \vec{a} als auch zu \vec{b} orthogonal
- Es gilt $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, wobei φ der (kleinere) von \vec{a} und \vec{b} eingeschlossene Winkel ist. ($0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$).
- Die Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.



Vektorprodukt zweier Vektoren

Bemerkungen:

- Der Betrag $|\vec{c}|$ entspricht dem Flächeninhalt des von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms.



- „Der Vektor \vec{c} ist sowohl zu \vec{a} als auch zu \vec{b} orthogonal“ impliziert $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ und $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$.
- Sind die Vektoren \vec{a} und \vec{b} kollinear, d.h. entweder $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ oder $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$, dann gilt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
- Gemäß Definition ergibt sich
$$\begin{aligned} \vec{e}_x \times \vec{e}_y &= \vec{e}_z, \\ \vec{e}_y \times \vec{e}_z &= \vec{e}_x, \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_x &= \vec{e}_y. \end{aligned}$$

Rechengesetze:

Seien \vec{a} , \vec{b} , und \vec{c} drei beliebige Vektoren des \mathbb{R}^3 , dann gilt:

- Distributivgesetz: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

- Anti-Kommutativgesetz: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

- Multiplikation eines Vektorproduktes mit einem Skalar

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$$

Für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ lässt sich das Vektorprodukt auch wie folgt berechnen:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Beispiel: Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ gilt

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-5) \cdot 3 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 0 - (-5) \cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -15 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gibt Regeln/Eselsbrücken, die das Ausrechnen des Vektorproduktes erleichtern:

1.Weg: „Vorgehensweise auswendiglernen“

1. Zeile abdecken

Einträge der 2. und 3. Zeile über Kreuz multiplizieren und danach subtrahieren $\rightarrow a_y b_z - a_z b_y$ ist die 1. Zeile des Ergebnisvektors \vec{c} .

Beispiel:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (-5) \cdot 3 - 2 \cdot 0 \\ * \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

Fortsetzung des 1. Wegs zur Berechnung des Vektorproduktes

2. Zeile abdecken:

Einträge der 1. und 3. Zeile über Kreuz multiplizieren und danach subtrahieren $\rightarrow a_x b_z - a_z b_x$ ist die 2. Zeile des Ergebnisvektors \vec{c} .

Danach: Vorzeichen in der 2. Zeile des Ergebnisvektors umkehren, d.h. $-(a_x b_z - a_z b_x) = a_z b_x - a_x b_z$

Beispiel:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-5) \cdot 3 - 2 \cdot 0 \\ -(1 \cdot 3 - 2 \cdot 2) \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ +1 \\ * \end{pmatrix}$$

Fortsetzung des 1. Wegs zur Berechnung des Vektorproduktes

3. Zeile abdecken:

Einträge der 1. und 2. Zeile über Kreuz multiplizieren und danach subtrahieren $\rightarrow a_x b_y - a_y b_x$ ist die 3. Zeile des Ergebnisvektors \vec{c} .

Beispiel:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (-5) \cdot 3 - 2 \cdot 0 \\ -(1 \cdot 3 - 2 \cdot 2) \\ 1 \cdot 0 - (-5) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

2.Weg: SPE (*) – einfacher, einprägsam und sicherer

Vorbereitung: Wir schreiben die beiden Vektoren nebeneinander.
Zusätzlich wiederholen wir die ersten beiden Zeilen noch ein Mal darunter.

$$\begin{array}{cc} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \\ \hline a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{array}$$

Dann: Die 1.Zeile abdecken. Einträge der 2. und 3. Zeile über Kreuz multiplizieren und subtrahieren, d.h.

$a_y b_z - a_z b_y$ ist die 1. Zeile des Ergebnisvektors \vec{c} .

$$\begin{array}{cc} \overline{a_x} & \overline{b_x} \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \\ \hline a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

(*) „Sparlas persönliche Eselsbrücke“

Vektorprodukt – Berechnung in Komponentenschreibweise

SPE

Analog geht es weiter:

2. Zeile abdecken:

Einträge der 3. und 4. Zeile über Kreuz multiplizieren und danach subtrahieren → $a_z b_x - a_x b_z$ ist die 2. Zeile des Ergebnisvektors \vec{c} .

$$\begin{array}{cc} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \\ \hline a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ * \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt – Berechnung in Komponentenschreibweise

SPE

Analog geht es weiter:

3. Zeile abdecken:

Einträge der 4. und 5. Zeile über Kreuz multiplizieren und danach subtrahieren → $a_x b_y - a_y b_x$ ist die 3. Zeile des Ergebnisvektors \vec{c} .

$$\begin{array}{cc} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ \underline{a_z} & \underline{b_z} \\ a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt – Berechnung in Komponentenschreibweise

SPE

Zur Wiederholung:

1. Zeile abdecken: Einträge der 2. und 3. Zeile über Kreuz multiplizieren und subtrahieren, d.h.

$a_y b_z - a_z b_y$ ist die 1. Zeile des Ergebnisvektors \vec{c} .

$$\begin{array}{cc} \overline{a_x} & \overline{b_x} \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{array}$$
$$\begin{array}{cc} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{array}$$

Analog geht es weiter:

2. Zeile abdecken: Einträge der 3. und 4. Zeile über Kreuz multiplizieren und subtrahieren, d.h.

$a_z b_x - a_x b_z$ ist die 2. Zeile des Ergebnisvektors \vec{c} .

$$\begin{array}{cc} a_x & b_x \\ \overline{a_y} & \overline{b_y} \\ a_z & b_z \end{array}$$
$$\begin{array}{cc} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{array}$$

3. Zeile abdecken: Einträge der 4. und 5. Zeile über Kreuz multiplizieren und subtrahieren, d.h.

$a_x b_z - a_z b_x$ ist die 3. Zeile des Ergebnisvektors \vec{c} .

$$\begin{array}{cc} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ \overline{a_z} & \overline{b_z} \end{array}$$
$$\begin{array}{cc} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{array}$$

Fertig!

Definition: Spatprodukt

Unter dem Spatprodukt $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ versteht man das **gemischte Produkt**:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

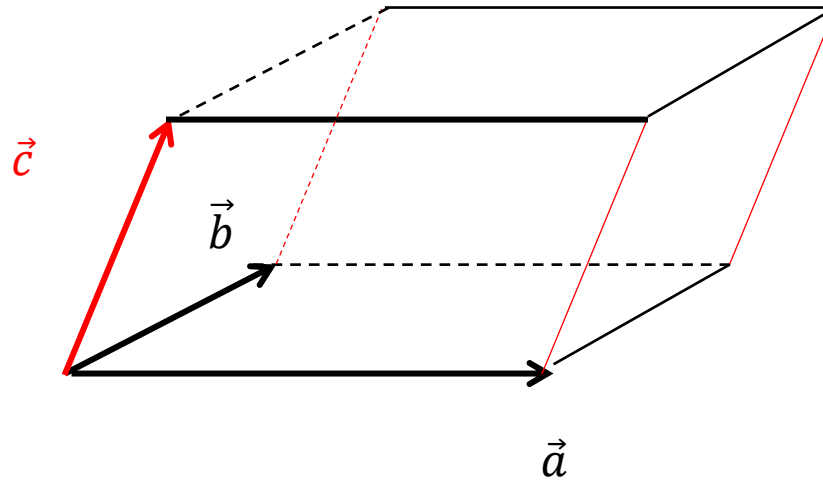
Rechengesetze:

- $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$
- $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}]$

Geometrische Bedeutung des Spatproduktes:

Die drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} spannen einen so genannten Spat (Parallelelepiped) auf.

Das Spatprodukt der Vektoren entspricht dem Volumen des aufgespannten Spats.



Das Spatprodukt

Das Spatprodukt $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ verschwindet, wenn das Volumen des aufgespannten Parallelepipeds verschwindet.

D.h. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$ gilt, wenn alle drei Vektoren in einer Ebene liegen, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ heißen dann **komplanar**.

Alle drei Vektoren liegen in einer Ebene wenn:

- entweder $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}$ oder $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$,
denn dann liegen alle Vektoren in der Ebene des Parallelogramms das durch \vec{a} und \vec{b} aufgespannt wird
- oder $\vec{a} \perp (\vec{b} \times \vec{c})$,
denn dann liegen alle Vektoren in der Ebene des Parallelogramms das durch \vec{b} und \vec{c} aufgespannt wird.