Vektoralgebra

- Anwendungen: Geraden

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Achtung!

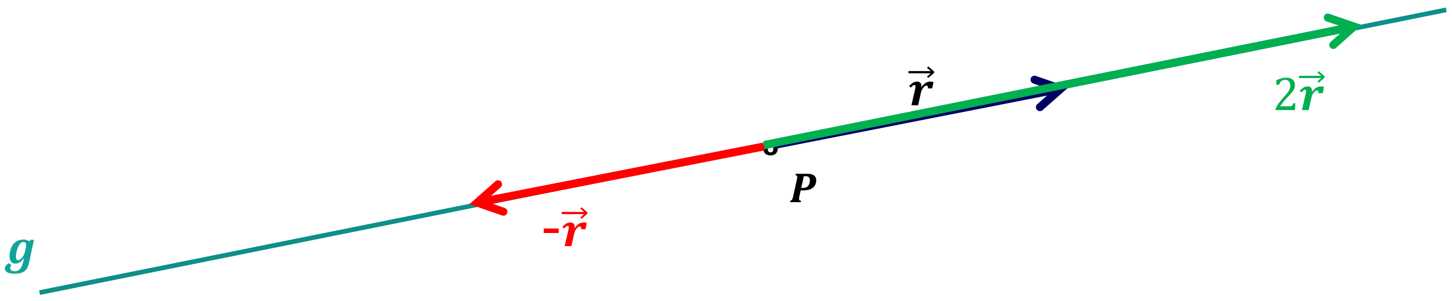
Dieses Folienskript soll den Studierenden einiges an mechanischer Schreibarbeit abnehmen und dazu beitragen, sich auf das eigentliche Fach und seine vielfältigen Themen konzentrieren zu können.

Es ersetzt keinesfalls eigene, ergänzende Notizen und Aufzeichnungen zu den Lehrinhalten, die während der Vorlesungen vermittelt werden.

Dieses Skript stellt kein Lehrbuch dar!
Nicht alles, was in der Vorlesung erarbeitet wird,
ist im Skript enthalten.

Vektorielle Darstellung einer Geraden

Eine gerade Linie ohne Anfang und ohne Ende nennen wir **Gerade**.

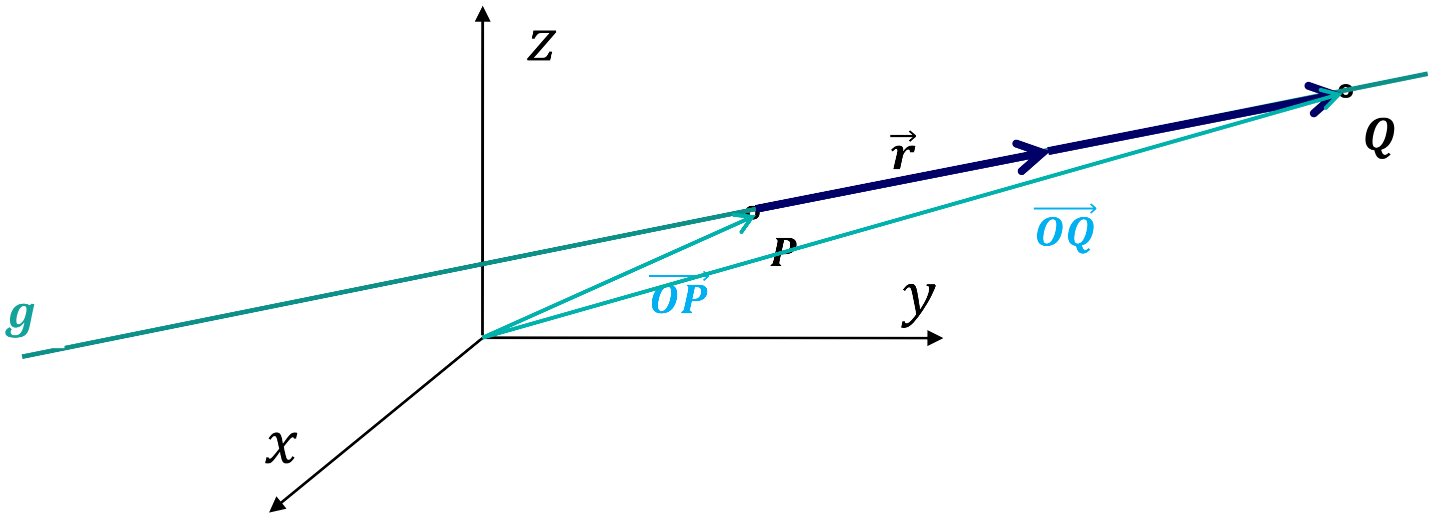


Kennen wir einen **Punkt** P auf der Geraden g,

dann erreichen wir alle anderen Punkte der Geraden, indem wir dem so genannten **Richtungsvektor** $\vec{r}$ entsprechend lange folgen.

Bemerkung: So führt uns $2\vec{r}$ natürlich doppelt so weit auf der Geraden und $-\vec{r}$ in die entgegengesetzte Richtung auf der Geraden entlang.

Vektorielle Darstellung einer Geraden



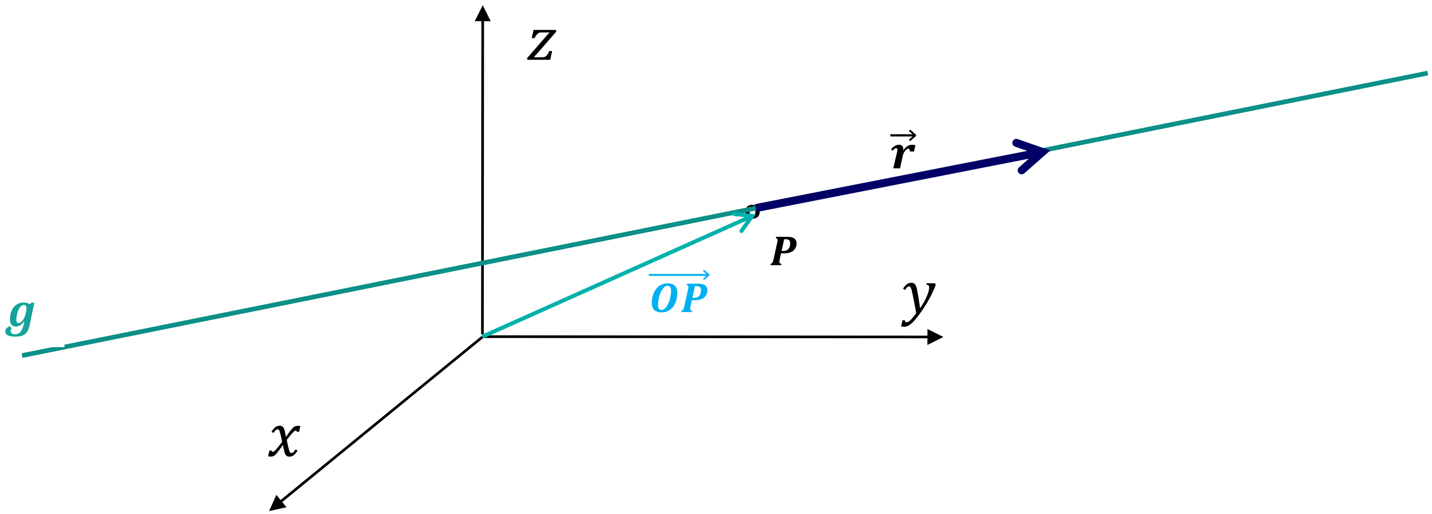
Um den **Punkt** $\boldsymbol{P}$ auf der Geraden zu kennen, brauchen wir seinen Ortsvektor $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}$.

Um von $\boldsymbol{P}$ aus nun beispielsweise den Punkt $\boldsymbol{Q}$ zu erreichen, müssen wir die Summe $\overrightarrow{\boldsymbol{OQ}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OP}} + 2\vec{\boldsymbol{r}}$ bilden.

Allgemein gilt für jeden Punkt $\boldsymbol{Q}$ auf der Geraden $\boldsymbol{g}$:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{OQ}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OP}} + \boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{r}} \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vektorielle Darstellung einer Geraden



Allgemein bildet man deshalb die **Punkt-Richtungs-Form** einer Geraden:

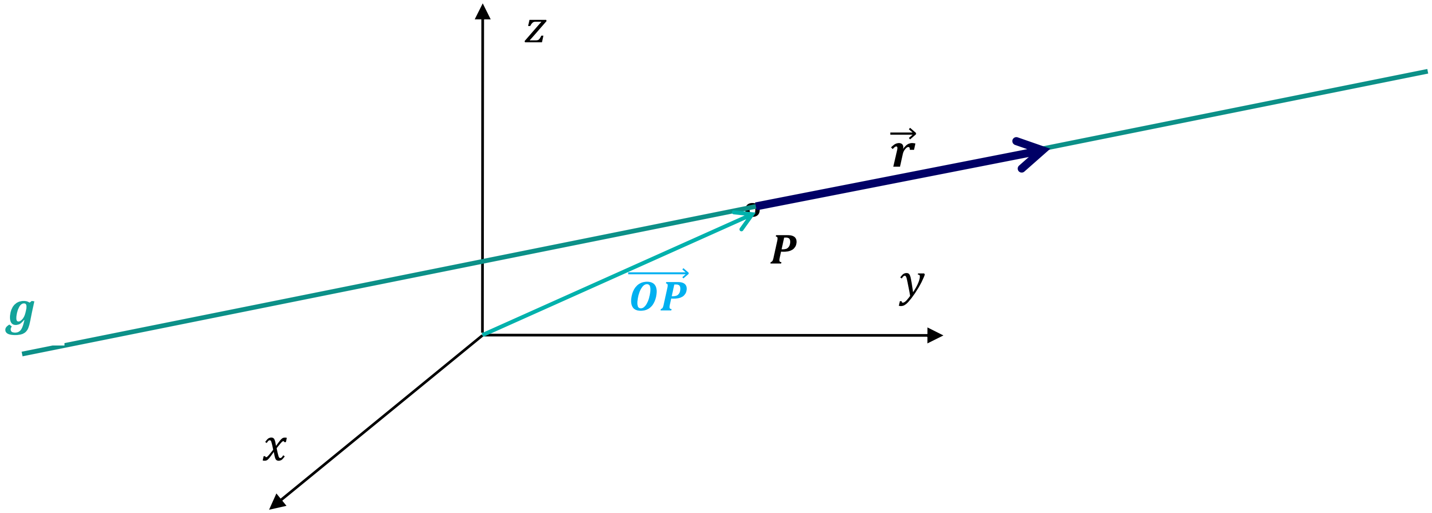
Sei $\overrightarrow{OP}$ dazu der Ortsvektor eines fest gewählten Punktes P der Geraden g **(Stützvektor)** und sei $\vec{r}$ der **Richtungsvektor** der Geraden g.

Für den Ortsvektor eines beliebigen Punktes auf der Geraden schreiben wir nun (zur Vereinfachung) $\vec{x}$.

Dann ist die **Punkt-Richtungs-Form** der Geraden

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{r}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vektorielle Darstellung einer Geraden



Punkt-Richtungs-Form der Geraden: $g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{r},\ \lambda \in \mathbb{R}.$

Mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich die Komponentendarstellung der Geraden zu:

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix},\quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vektorielle Darstellung einer Geraden

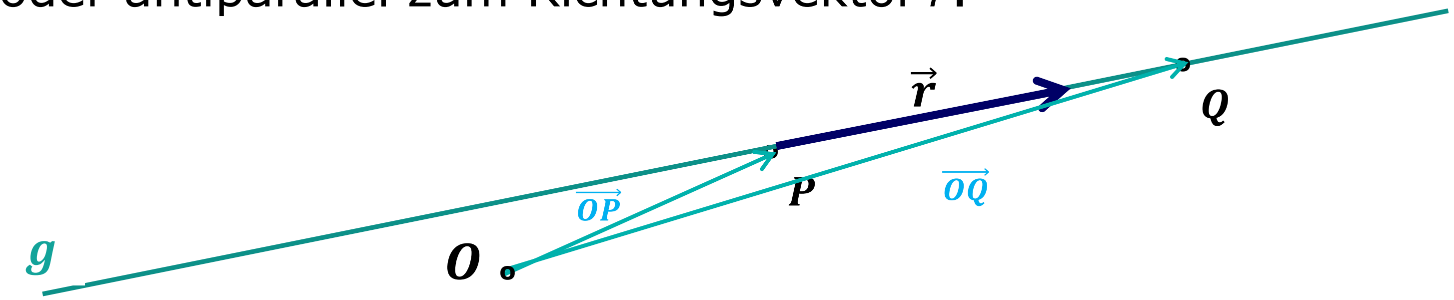
Bemerkungen:

- Im $\mathbb{R}^2$ geht alles analog.
  Die Vektoren haben dann nur 2 Komponenten.

- Sind P und Q beliebige Punkte einer Geraden g mit Richtungs-vektor $\vec{r}$, dann gilt entweder

$$\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \upuparrows \vec{r} \quad \text{oder} \quad \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \uparrow\downarrow \vec{r}.$$

  In Worten:
  Der Vektor von P nach Q, d.h. $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ ist entweder parallel oder antiparallel zum Richtungsvektor $\vec{r}$.



Vektorielle Darstellung einer Geraden

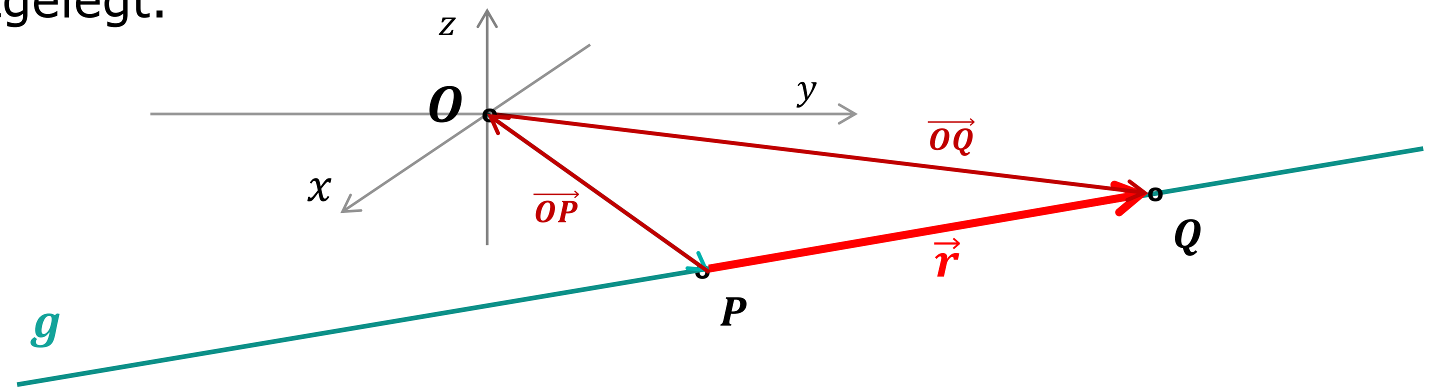
FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Ausblick auf die kommenden Aufgabentypen:

- Herleitung einer Punkt-Richtungs-Form einer Geraden aus zwei gegebenen Punkten
- Abstand Punkt - Gerade
- Abstand zweier paralleler Geraden
- Abstand zweier windschiefer Geraden
- Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden

Punkt-Richtungs-Form aus zwei Punkten

Eine Gerade wird durch die Angabe zweier Punkte eindeutig festgelegt.



Ermittlung der Punkt-Richtungs-Form der Geraden:

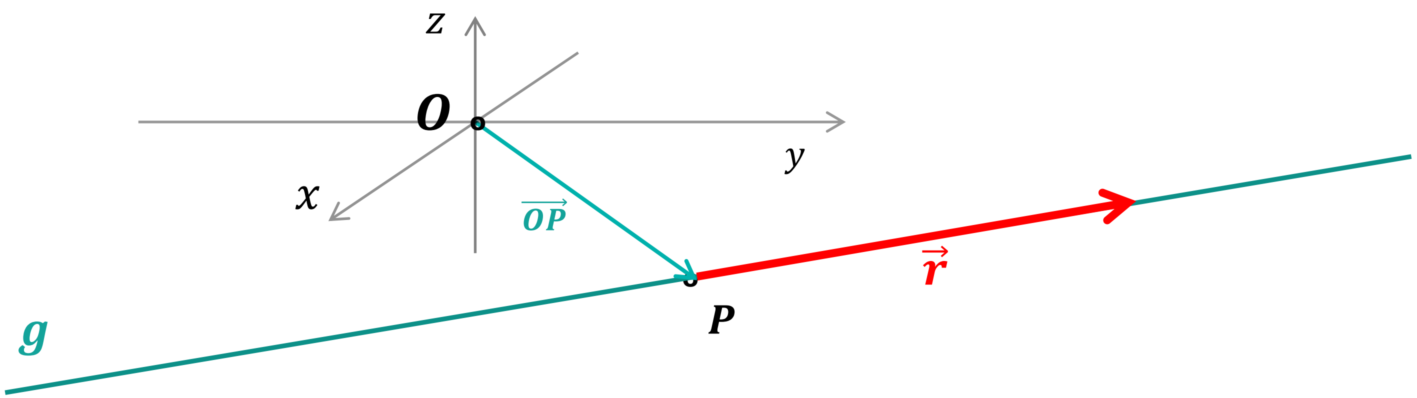
1. Wähle einen der gegebenen Punkte um den Stützvektor festzulegen. Hier z.B.: $\overrightarrow{OP}$

2. Wähle als Richtungsvektor den Vektor $\vec{r} = \overrightarrow{PQ}$, d.h. $\vec{r} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

3. Damit ergibt sich: $\boldsymbol{g}: \vec{\boldsymbol{x}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OP}} + \boldsymbol{\lambda} \cdot \left(\overrightarrow{\boldsymbol{OQ}} - \overrightarrow{\boldsymbol{OP}}\right)$ **,** $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$

Punkt-Richtungs-Form aus zwei Punkten

Eine Gerade wird durch die Angabe zweier Punkte eindeutig festgelegt. **Aber die Punkt-Richtungs-Form der Geraden ist nicht eindeutig.**



1. Der Stützvektor der Punkt-Richtungs-Form ist **nicht** eindeutig: Der Ortsvektor **jedes** Punktes auf der Geraden kann als Stützvektor gewählt werden.

2. Der Richtungsvektor der Punkt-Richtungs-Form ist **nicht** eindeutig: **Jedes** Vielfache eines gegebenen Richtungsvektors ist ebenfalls ein Richtungsvektor.

Vektorielle Darstellung einer Geraden

Ausblick auf die kommenden Aufgabentypen:

- Herleitung einer Punkt-Richtungs-Form einer Geraden aus zwei gegebenen Punkten
- Abstand Punkt - Gerade
- Abstand zweier paralleler Geraden
- Abstand zweier windschiefer Geraden
- Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden

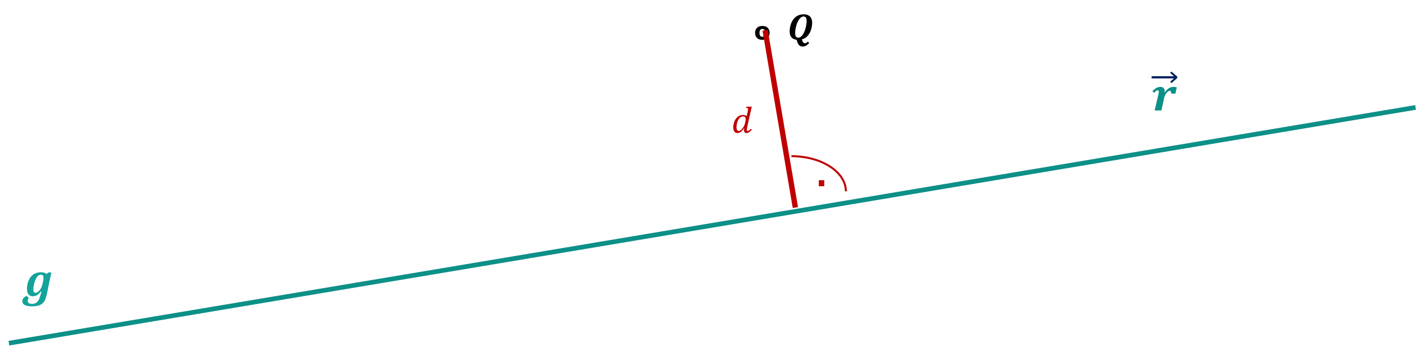
Abstand d des Punktes Q zur Geraden g

Definition: Der **Abstand eines Punktes zu einer Geraden** ist die Länge derjenigen Verbindungsstrecke vom Punkt zur Geraden, die zu der Geraden orthogonal ist.

Bemerkung: Diese orthogonale Verbindungsstrecke ist die kürzeste von allen möglichen Verbindungsstrecken vom Punkt zur Geraden.
Man bezeichnet diese kürzeste Verbindungsstrecke auch als das **Lot**, ihren Endpunkt auf der Geraden als den **Lotfußpunkt**.

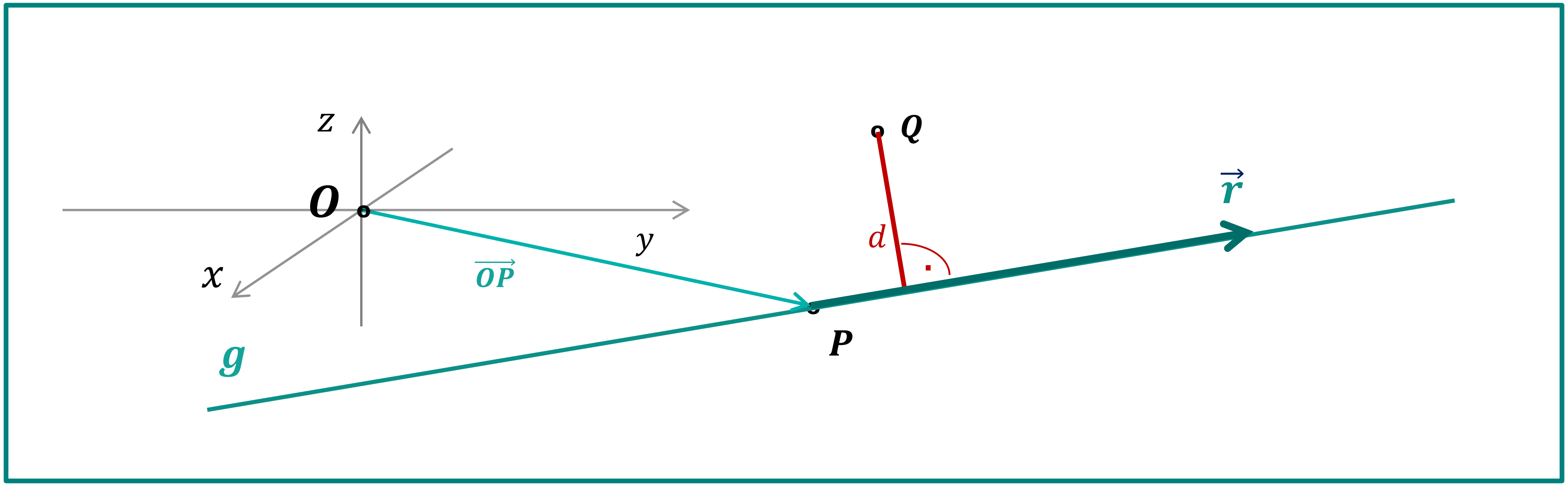
Wir schreiben für den Abstand $d(Q, g)$ oder d, wenn der Bezug eindeutig ist.

Beispiel:



Abstand d des Punktes Q zur Geraden g

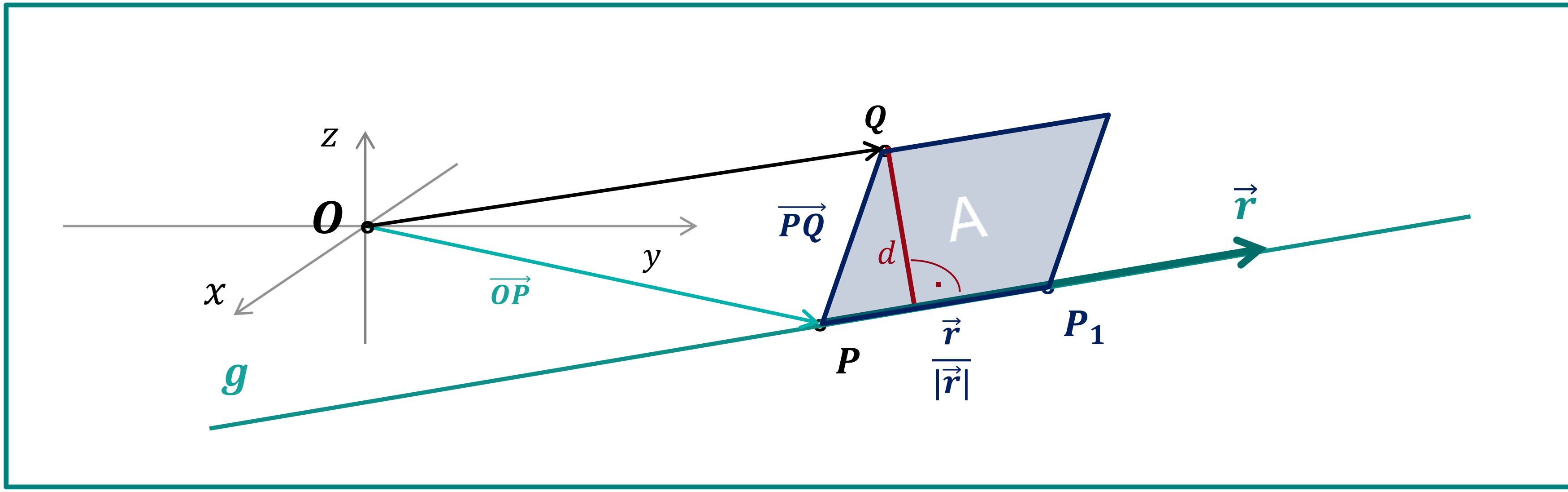
Gegeben: Gerade g in Punkt-Richtungs-Form $g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{r},\ \ \lambda \in \mathbb{R}$ und ein Punkt Q. (P sei der Punkt auf g mit Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$.)



Gesucht: Abstand d des Punktes Q zur Geraden g.

Abstand d des Punktes Q zur Geraden g

Gesucht: Abstand d des Punktes Q zur Geraden g.

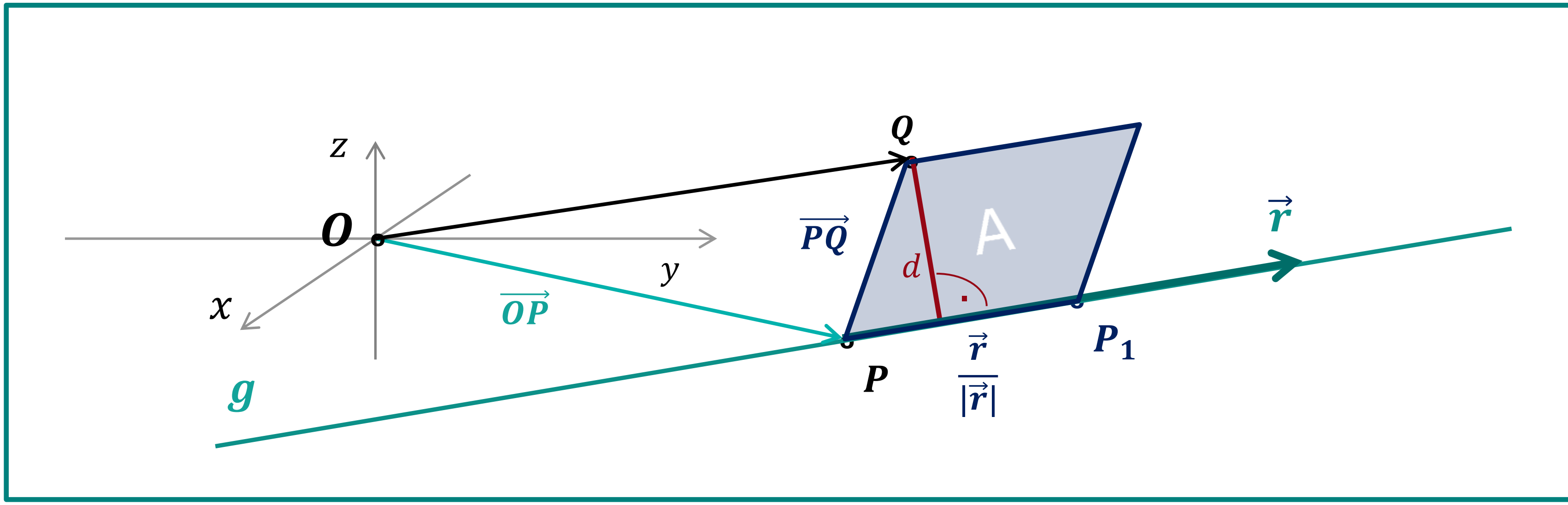


Herleitung: Wir betrachten das Parallelogramm mit den Eckpunkten Q und P.
Es wird aufgespannt durch die Vektoren $\overrightarrow{PP_1}$ und $\overrightarrow{PQ}$.
Dabei wählen wir P_1 so, dass $\overrightarrow{PP_1} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ gilt.

Für die Fläche A des Parallelogramms gilt:

$$\begin{aligned} A &= \text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe} \\ &= |\overrightarrow{PP_1}| \cdot d \\ &= |\overrightarrow{PP_1} \times \overrightarrow{PQ}| \end{aligned}$$

Abstand d des Punktes Q zur Geraden g



Herleitung:

Für die Fläche A gilt: $A = \text{Grundlinie} \cdot \text{Höhe} \;\; = |\overrightarrow{PP_1}| \cdot d \;\; = |\overrightarrow{PP_1} \times \overrightarrow{PQ}|$

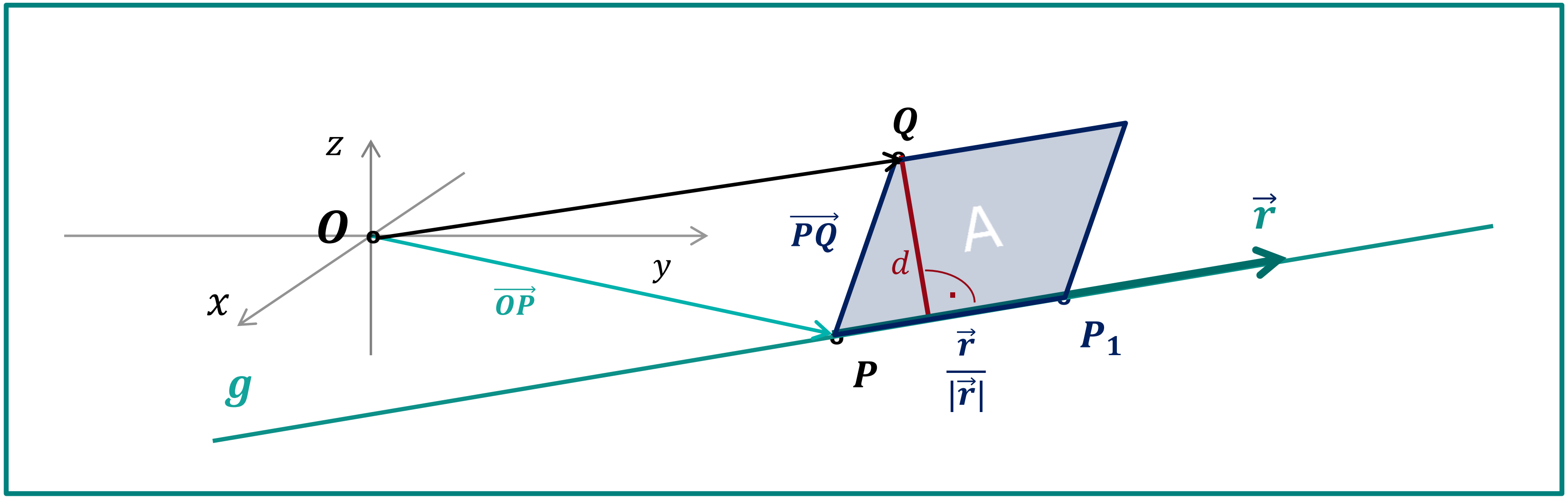
Daraus können wir für d ableiten:

Entweder gilt $\overrightarrow{\boldsymbol{PP_1}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} = \mathbf{0}$, dann liegt Q auf der Geraden und $d = 0$.

Oder es gilt $\overrightarrow{\boldsymbol{PP_1}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} \neq \mathbf{0}$, dann liegt Q **nicht** auf der Geraden und

$$\boxed{d = \frac{\left|\overrightarrow{PP_1} \times \overrightarrow{PQ}\right|}{\left|\overrightarrow{PP_1}\right|}}$$

Abstand d des Punktes Q zur Geraden g



Herleitung:

Mit $\overrightarrow{PP_1} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ und $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ ergibt sich aus $d = \frac{\left|\overrightarrow{PP_1} \times \overrightarrow{PQ}\right|}{\left|\overrightarrow{PP_1}\right|}$

$$d = \frac{\left|\vec{r} \times (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP})\right|}{|\vec{r}|} \quad .$$

Vektorielle Darstellung einer Geraden

Ausblick auf die kommenden Aufgabentypen:

- Herleitung einer Punkt-Richtungs-Form einer Geraden aus zwei gegebenen Punkten
- Abstand Punkt - Gerade
- Abstand zweier paralleler Geraden
- Abstand zweier windschiefer Geraden
- Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden

FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Paralleler Geraden g und h

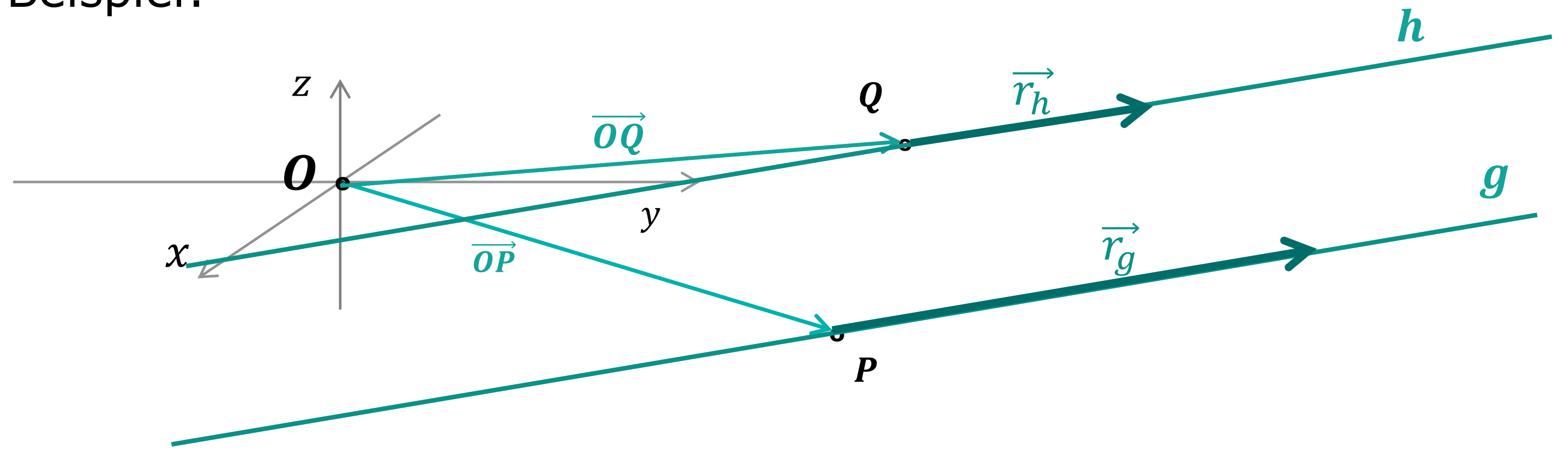
Definition:

Die Gerade g in Punkt-Richtungs-Form $g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{r_g}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ und

Die Gerade h in Punkt-Richtungs-Form $h\colon \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + \mu\overrightarrow{r_h}, \quad \mu \in \mathbb{R}$

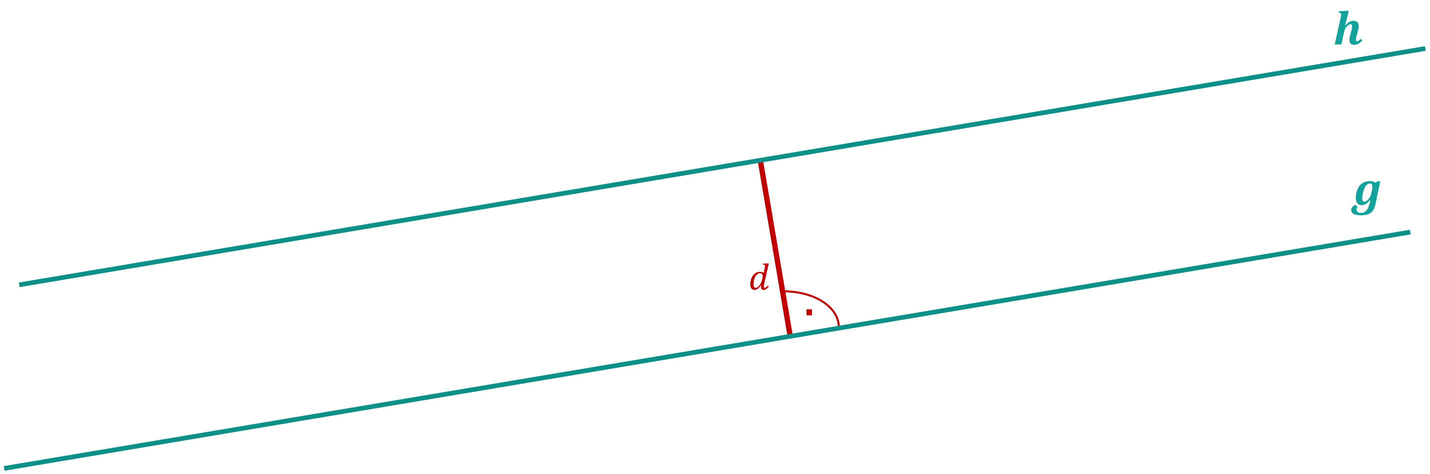
heißen **parallel**, wenn entweder $\overrightarrow{r_g} \uparrow\uparrow \overrightarrow{r_h}$ oder $\overrightarrow{r_h} \uparrow\downarrow \overrightarrow{r_g}$ gilt.

Beispiel:



Abstand $d(g,h)$ zweier paralleler Geraden g und h.

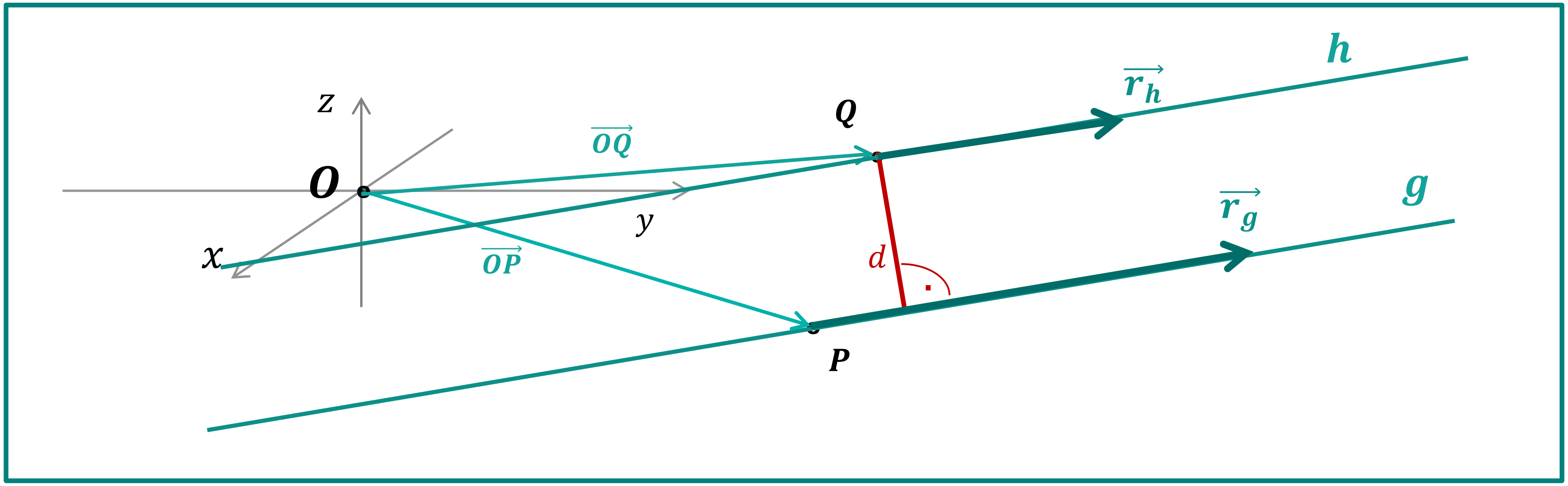
Definition: Der (senkrechte) **Abstand zweier paralleler Geraden** ist die Länge der Verbindungsstrecken der beiden Geraden, die zu den beiden Geraden orthogonal sind.



Bemerkung:
Diese orthogonalen Verbindungsstrecken sind alle gleich lang und sie sind gleichzeitig die kürzesten aller möglichen Verbindungsstrecken der beiden Geraden.
Wir schreiben für den Abstand $d(g,h)$ oder zur Abkürzung, falls der Zusammenhang klar ist, auch einfach nur d.

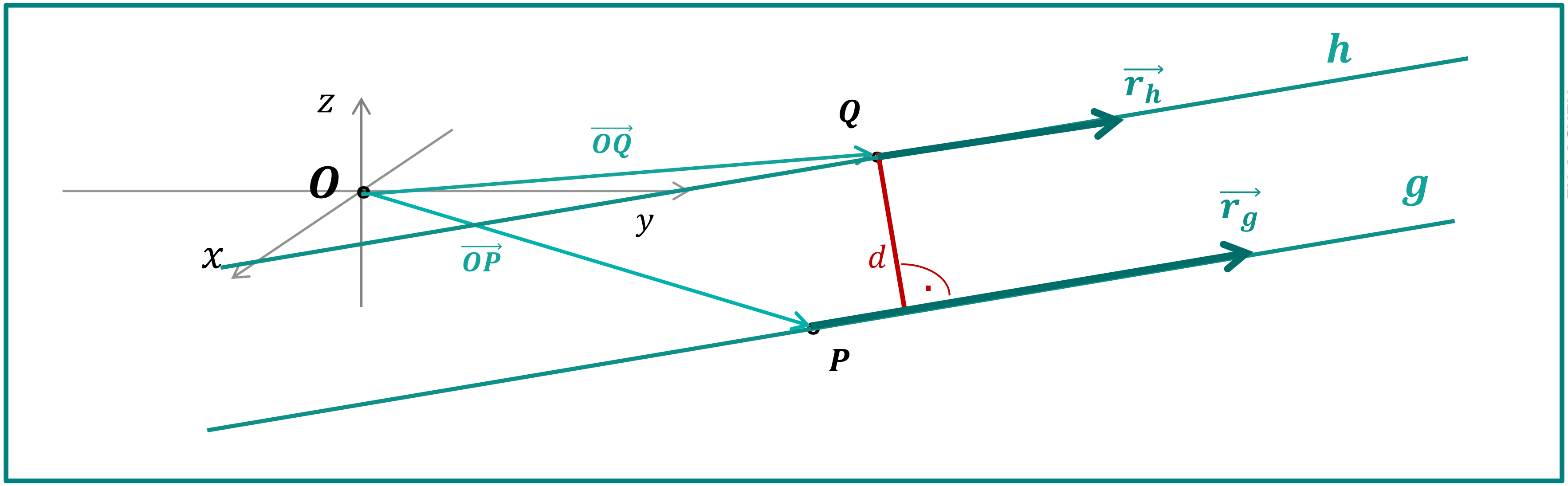
Abstand d zweier paralleler Geraden g und h

Gegeben: Die Gerade g in Punkt-Richtungs-Form $g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{r_g}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ und
die Gerade h in Punkt-Richtungs-Form $h\colon \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + \mu \overrightarrow{r_h}, \quad \mu \in \mathbb{R}$.



Gesucht: Abstand d zweier paralleler Geraden g und h.

Abstand d zweier paralleler Geraden g und h



Gesucht: Abstand d zweier paralleler Geraden g und h.

Herleitung:

Sind Geraden parallel, dann ist der Abstand zwischen den Geraden überall gleich!

Deshalb ist der Abstand zwischen den Geraden g und h gleich dem Abstand zwischen einem Punkt Q von h und der Geraden g: $d(g,h) = d(g,Q)$

Der Einfachheit halber nutzen den Stützvektor der Geraden h, bzw. den zugehörigen Punkt Q, und berechnen $d = d(g,h) = \mathrm{d}(\mathrm{g},Q)$.

Somit gilt für den Abstand d zwischen h und g: $d = \dfrac{\left|\overrightarrow{r_g} \times (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP})\right|}{\left|\overrightarrow{r_g}\right|}$.

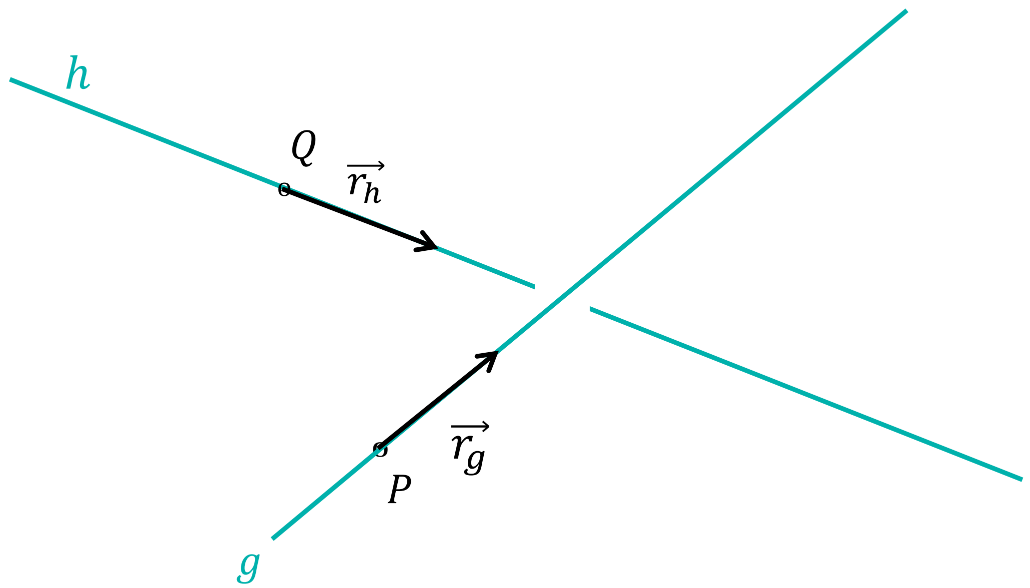
Vektorielle Darstellung einer Geraden

Ausblick auf die kommenden Aufgabentypen:

- Herleitung einer Punkt-Richtungs-Form einer Geraden aus zwei gegebenen Punkten
- Abstand Punkt - Gerade
- Abstand zweier paralleler Geraden
- Abstand zweier windschiefer Geraden
- Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden

Windschiefe Geraden

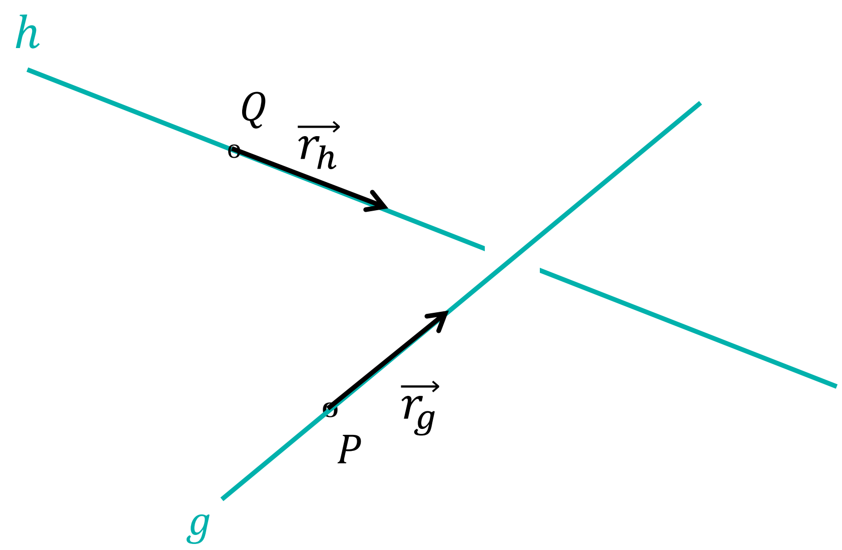
Definition: Zwei Geraden g und h heißen **windschief**, wenn sie nicht parallel sind und sich auch nicht schneiden.



Wann sind Geraden windschief?

Bemerkung:

Wenn die Geraden h und g windschief sind, dann sind sie nicht parallel und schneiden sich auch nicht.



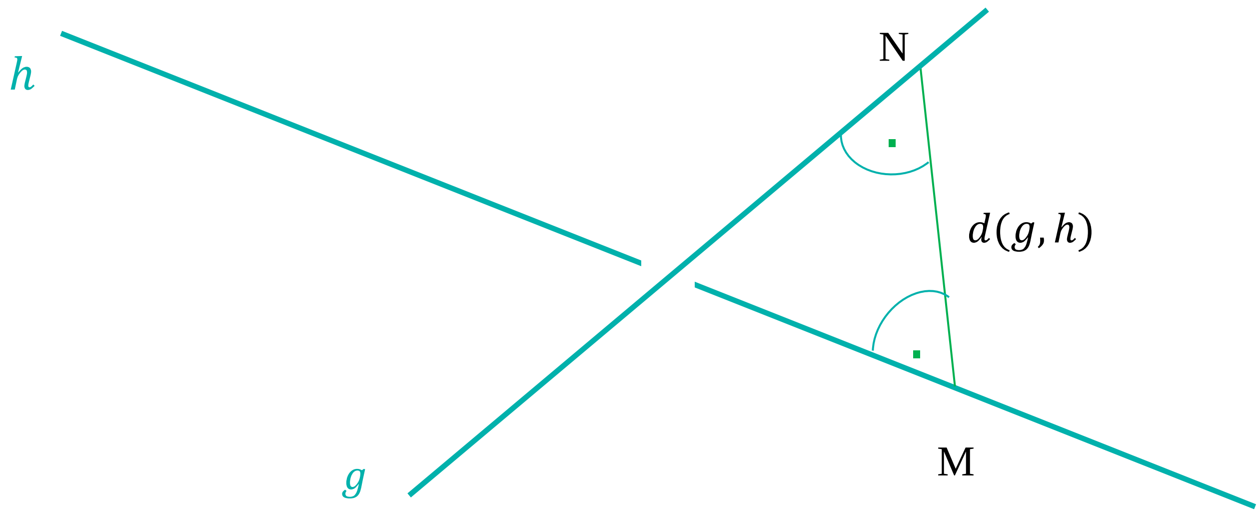
D.h. windschiefe Geraden sind nicht parallel und liegen nicht in einer Ebene. **Windschiefe Geraden liegen in parallelen Ebenen.**

Daraus ergibt sich als Kriterium für windschiefe Geraden:

g und h sind genau dann windschief, wenn
$\overrightarrow{r_g} \times \overrightarrow{r_h} \neq \vec{0}$ (nicht parallel) und
$\left[\overrightarrow{r_g}, \overrightarrow{r_h}, \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}\right)\right] \neq 0$ (nicht in einer Ebene).

Abstand d zweier windschiefer Geraden g und h

Definition: Der Abstand $d(g,h)$ zweier windschiefer Geraden g und h, ist die eindeutig bestimmte Strecke kleinster Länge, die die beiden windschiefe Geraden verbindet. Sie ist die einzige Strecke, die senkrecht auf beiden Geraden steht.



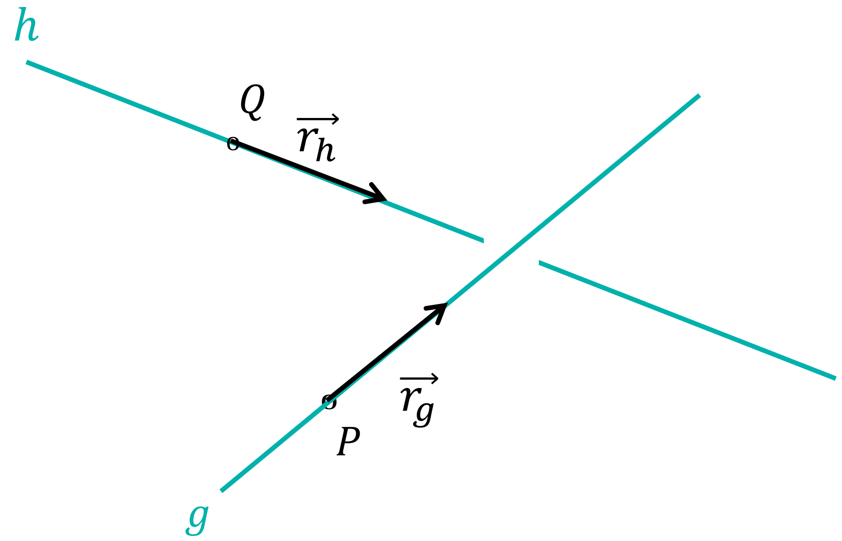
Abstand d zweier windschiefer Geraden g und h

Gegeben:

Zwei windschiefe Geraden g und h,

Gerade g in Punkt-Richtungs-Form $g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{r_g}\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$ und

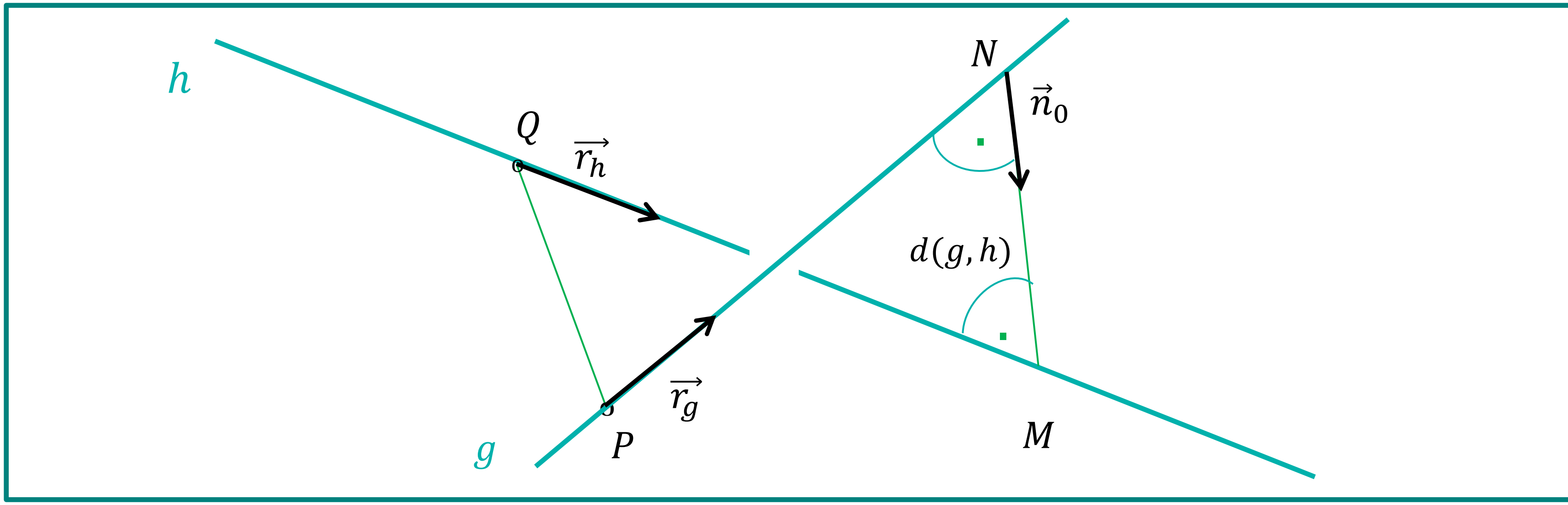
Gerade h in Punkt-Richtungs-Form $h\colon \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + \mu\overrightarrow{r_h}\,,\ \mu \in \mathbb{R}$.



Gesucht: Abstand d zweier windschiefer Geraden g und h.

Abstand d zweier windschiefer Geraden g und h

Gesucht: Abstand d zweier windschiefer Geraden g und h.

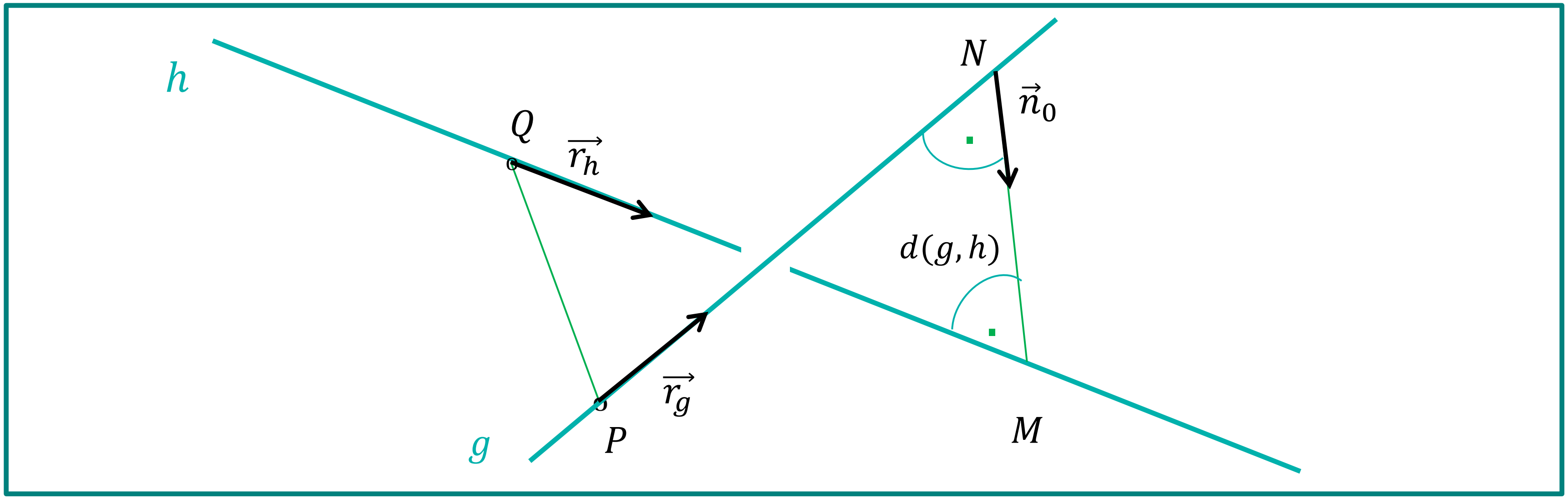


Herleitung:

Wir wissen einiges mehr über die Situation, als Sie vielleicht denken:

1. Vektoraddition liefert: $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PN} = \vec{0}$
2. $\vec{n}_0 = \dfrac{\vec{r_g} \times \vec{r_h}}{|\vec{r_g} \times \vec{r_h}|}$, denn $\vec{n}_0$ wählen wir als den Einheitsvektor, der senkrecht auf $\vec{r_g}$ und $\vec{r_h}$ steht.

Abstand d zweier windschiefer Geraden g und h



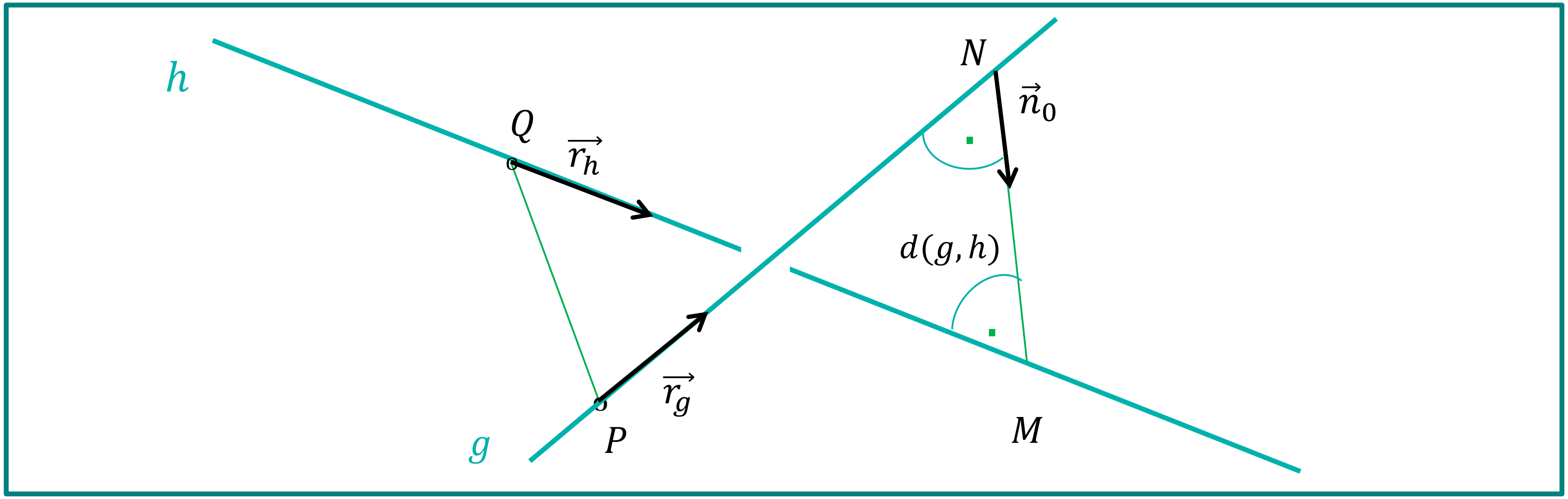
Herleitung:

3. Das Skalarprodukt liefert deshalb $\vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{r_g} = \vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{r_h} = 0$ sowie $\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0 = 1$

Damit erhalten wir $\vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{MQ} = 0,\ \vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{PN} = 0$ sowie

$$|\,\vec{n}_0 \cdot \overrightarrow{NM}| = |\,\vec{n}_0| \cdot |\overrightarrow{NM}| = 1 \cdot d(g,h) = d(g,h).$$

Abstand d zweier windschiefer Geraden g und h



Herleitung:

4. All das lässt sich zusammenfassen zu:

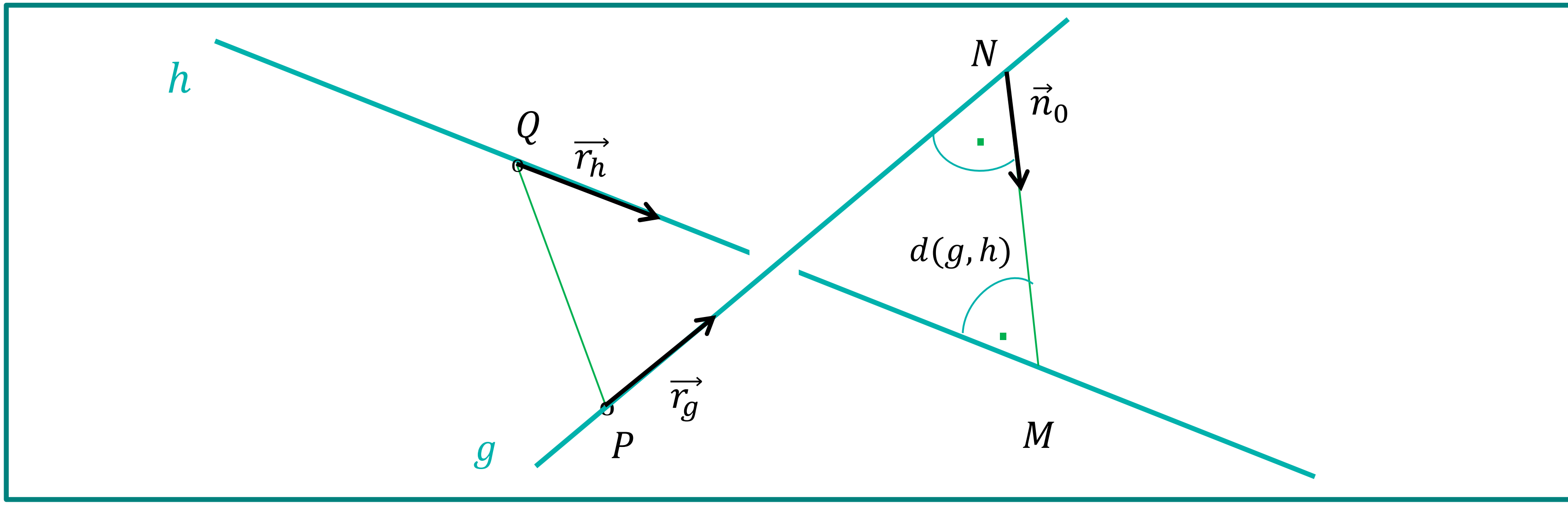
$$\underbrace{\left(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PN}\right)}_{=\vec{0}} \cdot \vec{n}_0 = \overrightarrow{NM} \cdot \vec{n}_0 + \overrightarrow{MQ} \cdot \vec{n}_0 + \overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}_0 + \overrightarrow{PN} \cdot \vec{n}_0$$

$$= d(g,h) + \vec{0} + \overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}_0 + \vec{0}$$

$$= \vec{0}.$$

Abstand d zweier windschiefer Geraden g und h

Gesucht: Abstand d zweier Paralleler Geraden g und h.



Herleitung: Also gilt $d(g,h) = \left|\overrightarrow{QP} \cdot \vec{n}_0\right|$

und mit $\vec{n}_0 = \frac{\vec{r_g} \times \vec{r_h}}{|\vec{r_g} \times \vec{r_h}|}$ und $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$ erhalten wir

$$d(g,h) = \frac{\left|(\vec{r_g} \times \vec{r_h}) \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ})\right|}{|\vec{r_g} \times \vec{r_h}|}$$

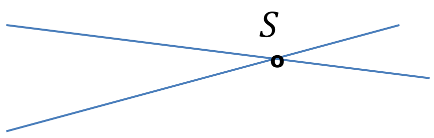
Vektorielle Darstellung einer Geraden

Ausblick auf die kommenden Aufgabentypen:

- Herleitung einer Punkt-Richtungs-Form einer Geraden aus zwei gegebenen Punkten
- Abstand Punkt - Gerade
- Abstand zweier paralleler Geraden
- Abstand zweier windschiefer Geraden
- Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden

Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden

Sind zwei Geraden g und h weder parallel noch windschief, dann **schneiden** Sie sich in einem Punkt S. Das bedeutet insbesondere



für $\quad g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda\, \overrightarrow{r_g}\,, \;\; \lambda \in \mathbb{R}$

und $\; h: \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + \mu\, \overrightarrow{r_h}\,, \;\; \mu \in \mathbb{R}$:

1. **Die Richtungsvektoren der beiden Geraden sind weder parallel noch antiparallel.** Sie können das auf zwei Arten überprüfen.

   Zum einen gilt dann $\overrightarrow{r_g} \neq s \cdot \overrightarrow{r_h}$, egal welches $s \in \mathbb{R}$ Sie einsetzen.
   Zum anderen können Sie dies mit Hilfe der Beziehung $\overrightarrow{r_g} \times \overrightarrow{r_h} \neq \vec{0}$ überprüfen.

2. **Die beiden Geraden liegen in einer gemeinsamen Ebene:**
   Das bedeutet, dass es keinen Spat geben kann, welcher von den Richtungs-vektoren und irgendeinem Verbindungsvektor zwischen beiden Geraden aufgespannt würde. Denn ein Spat ist ein Körper und der kann in keiner Ebene liegen!

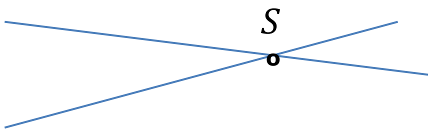
$$[\overrightarrow{r_g},\, \overrightarrow{r_h},\, (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ})] = 0.$$

Berechnung des Schnittpunktes zweier Geraden

Gegeben: Zwei sich schneidende Geraden

$g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda\, \overrightarrow{r_g}\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ und

$h: \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + \mu\, \overrightarrow{r_h}\,, \; \mu \in \mathbb{R}$.



Gesucht: Der Schnittpunkt S der beiden Geraden.

Berechnung:

Es gibt ein bestimmtes λ und ein bestimmtes μ, so dass für den gemeinsamen Schnittpunkt S und seinen Ortsvektor $\overrightarrow{OS}$ gilt:

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{r_g} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OQ} + \mu \overrightarrow{r_h}\ .$$

Wir setzten die Formeln der Geraden gleich und bestimmen die Parameter λ und μ so, dass die Gleichung erfüllt wird.

$$\overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{r_g} = \overrightarrow{OQ} + \mu \overrightarrow{r_h}$$

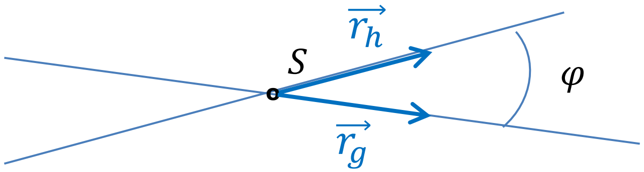
Das ist eine Gleichung mit zwei Unbekannten und 3 Gleichungen.
Wir wissen, wie wir so etwas lösen!

Schnittwinkel zweier Geraden

Schneiden sich zwei Geraden g und h in einem Punkt S, dann gibt es natürlich auch einen **Schnittwinkel φ** zwischen den beiden Geraden.

Für $\quad g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{r_g}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

und $\quad h: \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + \mu \overrightarrow{r_h}, \quad \mu \in \mathbb{R}$



Wir können mit Hilfe des Skalarproduktes den Winkel sofort berechnen:

$$\boxed{\varphi = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{r_g} \cdot \overrightarrow{r_h}}{\left|\overrightarrow{r_g}\right|\left|\overrightarrow{r_h}\right|}\right)}$$

Berechnung des Schnittpunktes zweier Geraden

Ein Beispiel:

Gegeben: $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \lambda \in \mathbb{R}$ und $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \mu \in \mathbb{R}$.

Aufgabe: Untersuchen Sie, ob die beiden Geraden sich schneiden.

Bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt S
und den Schnittwinkel φ.